Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 9 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. ((Einzelabgabe) 1+1+2 Punkte)

Die *alternierende Gruppe* A_n ist definiert als

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\} \subseteq S_n$$

a) Beweisen Sie, dass A_n eine Untergruppe von S_n ist.

b) Beweisen Sie, dass A_n genau $\frac{n!}{2}$ Elemente hat.

c) Seien $a, b \in \{1, \dots, n\}$ mit $a \neq b$. Beweisen Sie, dass die von der Menge

$$\{(a, b, k) \in S_n \mid k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a, b\}\} \subseteq S_n$$

erzeugte Untergruppe genau A_n ist. Hierbei ist (a, b, k) als Zykelschreibweise einer Permutation zu verstehen.

Aufgabe 2. ((Einzelabgabe) 1+1+1 Punkte)

Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, +, \cdot)$ zwei unitäre Ringe.

a) Zeigen Sie, dass $R \times S$ mit den komponentenweise definierten Verknüpfungen ein unitärer Ring ist.

b) Beschreiben Sie die Einheitengruppe von $R \times S$.

c) Zeigen Sie, dass die Charakteristik von $R \times S$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Charakteristiken von R und S ist.

Aufgabe 3. ((Gruppenabgabe) 1+1+2+2 Punkte)

a) Es sei $(G, *)$ eine endliche Gruppe und $a, b, c \in G$. Beweisen Sie:

  (i) $\operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(a^{-1})$

  (ii) $\operatorname{ord}(a * b) = \operatorname{ord}(b * a)$

b) Es sei $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ eine abelsche Gruppe der Ordnung n mit Verknüpfung $*$. Betrachten Sie das Element $g = g_1 * g_2 * \ldots * g_n$.

  (i) Beweisen Sie, dass g^2 das neutrale Element von G ist.

  (ii) Beweisen Sie, dass, falls n gerade ist, ein Element $h \in G$ existiert mit $\operatorname{ord}(h) = 2$.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 15.01.24 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Aufgabe 4. ((Gruppenabgabe) 1+1+1+1 Punkte)

Sei M eine Menge. Wir betrachten die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \Delta \quad &: \mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M), \quad (U,V) \mapsto U \Delta V := (U \cup V) \setminus (U \cap V) \\ \cap \quad &: \mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M), \quad (U,V) \mapsto U \cap V. \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie, dass $(\mathfrak{P}(M), \Delta)$ eine abelsche Gruppe ist.

b) Beweisen Sie, dass $(\mathfrak{P}(M), \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring ist.

c) Geben Sie Charakteristik und Einheitengruppe des so definierten Ringes an.

d) Sei $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Beweisen Sie, dass

$$\phi : \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(N), U \mapsto U \cap N$$

einen Ringhomomorphismus zwischen $(\mathfrak{P}(M), \Delta, \cap)$ und $(\mathfrak{P}(N), \Delta, \cap)$ definiert. Geben Sie $\ker \phi$ an.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 15.01.24 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.