Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 8 zur Lineare Algebra I

Aufgabe 1. ((Einzelabgabe) 4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Rang der folgenden Matrizen und berechnen Sie die Inverse falls möglich:

a) $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2. ((Einzelabgabe) 2+2+1 Punkte)

a) Betrachten Sie die aus 4 Elementen bestehende Menge $M = \{a, b, c, d\}$ auf der zwei Verknüpfung gegeben sind durch die folgenden Tabellen. Entscheiden Sie jeweils, ob $(M, \circ_x)$ eine Gruppe ist, und ob sie abelsch oder zyklisch ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

$\circ_1$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\circ_2$	a	b	c	d
a	a	d	c	b
b	d	c	d	a
c	c	d	a	b
d	b	a	b	c

b) Wir bezeichnen mit S_n die Menge aller bijektiven Abbildungen von der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf sich selbst.

(i) Beweisen Sie, dass $(S_n, \circ)$ eine Gruppe ist.

(ii) Nehmen Sie $n = 3$ an und bestimmen Sie die Ordnung der Abbildung $f \in S_3$ definiert durch

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 08.01.24 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Aufgabe 3. ((Gruppenabgabe) 1+1+2 Punkte)

a) Wir betrachten die Gruppe S_3 und ihr Element f definiert durch $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1$. Bestimmen Sie die Ordnung von f und alle Rechtsnebenklassen der von f erzeugten Untergruppe $\langle f \rangle$.

b) Beweisen Sie, dass die Menge $\mathrm{Fix}(1) = \{f \in S_n \mid f(1) = 1\} \subseteq S_n$ eine Untergruppe ist.

c) Beweisen Sie mithilfe des Satzes von Lagrange, dass die Gruppe S_n genau $n!$ viele Elemente hat.[1]

Aufgabe 4. ((Gruppenabgabe) 2+3 Punkte)

a) Seien $p, q, r \geq 2$ natürliche Zahlen. Seien außerdem $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$ und $B \in \mathbb{R}^{q \times r}$ Matrizen in Treppenform und $A' \in \mathbb{R}^{(p-1)\times(q-1)}$ und $B' \in \mathbb{R}^{(q-1)\times(r-1)}$ die Matrizen, die aus A und B durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entstehen. Beweisen Sie, dass dann die Matrix $C' \in R^{(p-1)\times(r-1)}$, die durch Streichen der ersten Zeile und Spalte der Matrix $A \cdot B$ entsteht, gegeben ist durch $A' \cdot B'$.

b) Beweisen Sie, dass für allgemeine Matrizen $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$ und $B \in \mathbb{R}^{q \times r}$ gilt, dass

$$\mathrm{Rang}(AB) \leq \min\{\mathrm{Rang}\, A, \mathrm{Rang}\, B\}.$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass Sie annehmen können, dass A und B Treppenformen sind. Führe Sie dann einen Induktionsbeweis über $p + q$ und verwenden Sie Teil a)

Aufgabe 5. ((Gruppenabgabe) 1+3 Bonuspunkte)

a) Beweisen Sie, dass jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch ist.

b) Beweisen Sie, dass jede Gruppe, in der alle nicht-trivialen Elemente die Ordnung 2 haben, abelsch ist.

[1] $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 1$ ist die Fakultät.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 08.01.24 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Aufgabe 6. (Und zum Schluss... (Einzelabgabe) 2+3 Bonuspunkte)

Anders als im Dezember hat der Weihnachtsmann im Sommer wenig zu tun und stellt sich deshalb ab und zu mathematische Fragen. Im vergangenen Sommer ist ihm folgendes in den Sinn gekommen: Nimmt man einen Weihnachtssterns (regelmäßiger fünfzackiger Stern in der Ebene) und spiegelt ihn an einer bestimmten Achse, oder dreht ihn um seinen Mittelpunkt um einen bestimmten Winkel, so erhält man wieder denselben Stern. Der Weihnachtsmann hat festgestellt, dass die Menge dieser Spiegelungs und Drehungsoperationen eine Gruppe bilden, die sogenannte *Symmetriegruppe*. Nun fragt er sich, wie viele Elemente diese Gruppe hat und welche möglichen Ordnungen ein Element der Gruppe haben kann. Können Sie ihm antworten?
Dieselbe Frage kann man sich stellen, wenn man ein klassisch verpacktes Weihnachtsgeschenk (dreidimensionaler Quader) betrachtet: In dem Fall dass der Quader drei, zwei oder eine verschiedene Kantenlänge hat, was ist die Ordnung seiner Symmetriegruppe und was sind die möglichen Elementordnungen?

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 08.01.24 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.