Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 7 zur Lineare Algebra I

Aufgabe 1. ((Einzelabgabe) 3 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS beschrieben durch $Ax = b$ für die folgende Belegung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ -1 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. ((Einzelabgabe) 2+1 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit von α.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = 0$ in Abhängigkeit von α.

Aufgabe 3. ((Einzelabgabe) 3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und Spur $A = 0$. Zeigen Sie, dass es $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $A^2 = \lambda I_2$.

Aufgabe 4. ((Gruppenabgabe) 3 Punkte)

Betrachten Sie für $n > 0$ die quadratische $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ beschrieben durch

$$a_{i,j} = \begin{cases} ij - i^2 + i & \text{falls } j \geq i \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$.
Hinweis: Schreiben Sie sich die Matrix so explizit wie möglich hin. Betrachten Sie auch Beispielwerte für n.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 18.12.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Aufgabe 5. ((Gruppenabgabe) 1+3 Punkte)

a) Betrachten Sie die Elementarmatrix $D_\lambda = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ für $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie: Für eine beliebige quadratische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bleibt in $D_\lambda B D_\lambda^{-1}$ die Diagonale unverändert gegenüber B.

b) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Matrix, sodass für alle $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt, dass $AM = MA$. Wir haben bereits gesehen, dass dann A symmetrisch sein muss. Tatsächlich ist A von der Form λI_n für $\lambda \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie dies.

Aufgabe 6. ((Weihnachtsaufgabe) 4 Bonuspunkte)

Ermitteln Sie experimentell/mittels Literaturrecherche eine Lösung des LGS über den Variablen $M(ehl), Z(ucker), B(utter), T(emperatur)$ für von Ihnen gewählte Parameter. Sie dürfen sinnvolle weitere Variablen einführen. Den Nachweis Ihrer praktischen Bemühungen geben Sie bitte direkt in Ihrer Kleingruppenübung ab.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 18.12.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.