Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 6 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. ((Einzelabgabe) 1+2+2 Punkte)

a) Welche der folgenden Matrizen sind in Treppenform?

i) $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $A_3 := \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

iv) $A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ v) $A_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vi) $A_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Bestimme die Lösungsmengen sowie die homogenenen Lösungsmengen für die folgenden beiden LGS:

$$i) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Gegeben sei die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine invertierbare Matrix S an, sodass $S \cdot B$ in Treppenform ist.

Aufgabe 2. ((Einzelabgabe) 1+2 Punkte)

a) Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und $k, l \in \{1, \dots, n\}$ feste Spalten- bzw. Zeilenindizes von A. Geben Sie eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ an, sodass für $(c_{i,j}) = C = BAB^{-1}$ gilt, dass $c_{k,l} = a_{l,k}$.
Hinweis: Es handelt sich um eine Elementarmatrix.

b) Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Matrix, sodass für alle $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt $A \cdot M = M \cdot A$. Zeigen Sie, dass A symmetrisch ist, d.h. $A = A^t$.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 11.12.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Aufgabe 3. ((Gruppenabgabe) 1+1+1+2 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrizen, sodass $A \cdot N = N \cdot A$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$I_n - (-1)^k N^k = (I_n + N) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i N^i$$

wobei wir $N^0 = I_n$ setzen.

b) Gilt $N^k = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist auch $(A \cdot N)^k = 0$.

c) Gilt $N^k = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist $(I_n + N)^k$ invertierbar.

d) Ist die Matrix A regulär und gilt $N^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann ist $A + N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär.

Aufgabe 4. ((Gruppenabgabe) 1+1+1+2 Punkte)

Wir definieren eine Relation $\sim$ auf $\mathbb{R}^{n\times m}$:

$$A \sim B :\Longleftrightarrow \exists M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : MA = B$$

a) Beweisen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Beweisen Sie, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^{n\times m}/\sim \to \mathcal{U}$, die $[A]$ abbildet auf die Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$, wohldefiniert ist. Dies bedeutet, dass die der Funktionswert unabhängig vom gewählten Repräsentanten A der Äquivalenzklasse ist.
In der Abbildung bezeichnet $\mathcal{U}$ die Menge aller Untervektorräume von $\mathbb{R}^m$.

c) Entscheiden Sie, ob Φ injektiv ist. Beweisen Sie Ihre Antwort.

d) Ist Φ surjektiv? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass es für jeden $\mathbb{R}$-Untervektorraum U von $\mathbb{R}^n$ endlich viele Elemente $v_1, \ldots, v_k \in U$ gibt, sodass

$$U = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

gilt.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 11.12.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.