Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 5 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. ((Einzelabgabe) 2+2 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ und $B, C \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_3}$ das Distributivgesetz gilt, d.h.

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

b) Berechnen Sie sofern möglich die Produkte $A_i \cdot B_i$ und $B_i \cdot A_i$ für folgende Matrizen:

a) $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B_1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A_3 := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B_3 := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

d) $A_4 := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_4 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2. ((Einzelabgabe) 1+1+1 Punkte)

Wir haben bereits gesehen, dass für beliebiges $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ die Struktur $(\mathbb{R}^{n \times m}, +, \cdot, 0)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Hierbei sind $+$ und $\cdot$ Addition und Skalarmultiplikation auf Matrizen wie bekannt und 0 ist die Nullmatrix, in der alle Einträge 0 sind.

a) Betrachte die Teilmenge

$$M = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \operatorname{Spur} A = 0\}$$

Hierbei bezeichnet $\operatorname{Spur} A$ die Summe der Diagonalelemente von A. Entscheiden Sie, ob M ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist und beweisen Sie Ihre Antwort.

b) Beweisen Sie, dass für quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\operatorname{Spur} A = \operatorname{Spur} A^t$. Gilt auch $\operatorname{Spur} A = \operatorname{Spur} A^{-1}$, falls A invertierbar ist?

c) Ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ ein Untervektorraum?

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 04.12.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Aufgabe 3. ((Gruppenabgabe) 2+2+1 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Wir definieren den von S erzeugten Unterraum von V wie folgt:

$$\langle S \rangle = \bigcap \{U \mid S \subseteq U \text{ und } U \text{ ist ein Untervektorraum von } V\}$$

Nach Proposition II.2.7 der Vorlesung ist $\langle S \rangle$ ein Untervektorraum von V.

a) Beweisen Sie, dass $\langle S \rangle$ der eindeutige minimale Untervektorraum von V ist, der S enthält. Hier bedeutet minimal, dass jeder Untervektorraum V', der S enthält, auch $\langle S \rangle$ enthält.

b) Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und die Teilmenge

$$S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \in \mathbb{N} : (f(n) = 1 \wedge \forall m \in \mathbb{N} : m \neq n \Rightarrow f(m) = 0)\}.$$

Bestimmen Sie den von S erzeugten $\mathbb{R}$-Untervektorraum $\langle S \rangle$ von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

c) Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Untervektorraum

$$U = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

von $\mathbb{R}^2$. Geben Sie eine minimale Menge $S \subseteq U$ an, sodass $\langle S \rangle = U$. Minimal bedeutet hier, dass für jede echte Teilmenge von $S' \subset U$ gilt, dass $\langle S' \rangle \neq U$.

Aufgabe 4. ((Gruppenabgabe) 2+2 Punkte)

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

eine reelle 2×2-Matrix. Beweisen Sie, dass falls A invertierbar ist, die inverse Matrix zu A gegeben ist durch

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Geben Sie außerdem ein notwendiges und hinreichendes Kriterium im Bezug auf $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ an dafür, dass A invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie eine reelle 2×2-Matrix B mit $B^2 = B \cdot B = -I_2$.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 04.12.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.