Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 4 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. ((Einzelabgabe) 2+2 Punkte)

a) Seien $\mathbb{R}$-Vektorräume $(V_1, +_1, \cdot_1, 0_1)$ und $(V_2, +_2, \cdot_2, 0_2)$ gegeben. Beweisen Sie, dass

$$(V_1 \times V_2, +, \cdot, (0_1, 0_2))$$

ein Vektorraum ist, wobei

$$\forall v_1, w_1 \in V_1, v_2, w_2 \in V_2 : (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2),$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

b) Folgern Sie, dass für beliebige $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ die Menge $\mathbb{R}^{n \times m}$ mit komponentenweiser Summe und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 2. ((Einzelabgabe) 2+2+1 Punkte)

Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Vielleicht kennen Sie diesen Raum aus der Analysis als die Menge aller reellen Folgen. In Beispiel II.2.3 der Vorlesung haben Sie gesehen, dass diese Menge eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur trägt.

a) Der Raum aller beschränkten Folgen ist definiert als

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists c \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : |f(n)| \leq c\}.$$

Beweisen Sie, dass $\ell^\infty(\mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.
Hinweis: Sie dürfen die Dreiecksungleichung auf $\mathbb{R}$ verwenden: Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a + b| \leq |a| + |b|$.

b) Den Raum der eventuellen Nullfolgen definiert man

$$N = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} : m \geq n \Rightarrow f(m) = 0\}.$$

Beweisen Sie, dass N ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\ell^\infty(\mathbb{R})$ ist.

c) Beweisen Sie, dass, falls W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, V ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von W und U ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V ist, dann U ebenfalls ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von W ist. Folgern Sie, dass N ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 27.11.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Aufgabe 3. ((Gruppenabgabe) 6 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$? Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung.

a) $V_1 := \{(x, y) \mid x + y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

b) $V_2 := \{(x, y) \mid x + y = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

c) $V_3 := \{(x, y) \mid x^4 + y^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

d) $V_4 := \{(x, y) \mid x^4 - y^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

e) $V_5 := \{(x + y, y^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

f) $V_6 := \{(x, y, z) \mid x = y = 3z\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 27.11.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Erinnerung:

- Eine Variante des Auswahlaxioms (C) besagt:

  Zu jeder nicht-leeren Menge M existiert eine Auswahlfunktion, d.h. eine Abbildung $f : \mathfrak{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ mit $f(A) \in A$ für alle $A \in \mathfrak{P}(M)$.

- Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Mann nennt eine Abbildung $g : Y \to X$ ein *Rechtsinverses* zu f, falls $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt.

Aufgabe 4. ((Einzelabgabe) 2+2 Bonuspunkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir ein weiteres Axiom (RI):

Zu jeder surjektiven Abbildung existiert ein Rechtsinverses.

a) Es sei eine nicht-leere Menge M gegeben. Wir definieren

$$\mathcal{M} = \{(x, A) \in M \times \mathfrak{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \mid x \in A\}$$

und betrachten auf $\mathcal{M}$ die Relation $\sim$ definiert durch $(x, A) \sim (y, B) :\Longleftrightarrow A = B$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$ ist. Geben Sie außerdem eine bijektive Abbildung $h : \mathcal{M}_\sim \to \mathfrak{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ an und zeigen Sie die Bijektivität.

b) Zeigen Sie, dass (RI) die Aussage (C) impliziert.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 27.11.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.