Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 3 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. ((Einzelabgabe) 3 Punkte)

Sei M eine Menge und $P \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine Partition von M. Beweisen Sie, dass die Relation

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \exists S \in P : x \in S \wedge y \in S$$

eine Äquivalenzrelation auf M ist.

Aufgabe 2. ((Einzelabgabe) 1+1+1 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Beweisen Sie

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $\lambda(-v) = (-\lambda)v$ und damit insbesondere $-v = (-1)v$.

b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ gilt $\lambda(v - w) = \lambda v - \lambda w$.

c) Für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $(\lambda_1 - \lambda_2)v = \lambda_1 v - \lambda_2 v$.

Hierbei ist $-v$ das Inverse von v und $-\lambda$ die reelle Zahl mit entgegengesetztem Vorzeichen zu λ.

Aufgabe 3. ((Gruppenabgabe) 3+3 Punkte)

a) Geben Sie für die folgenden Relationen an, welche der Eigenschaften

Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, Antisymmetrie

sie haben. Entscheiden Sie, ob es sich um Äquivalenz- oder Ordnungsrelationen handelt. Begründen Sie jede Ihrer (positiven und negativen!) Antworten.

(i) Auf der Menge $\{1, 2, 3, A, B\}$ definieren wir die Relation $\sim$ durch

$$1 \sim A, A \sim 2, A \sim 3, 2 \sim B, 3 \sim B$$

(ii) Teilbarkeit auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, d.h.

$$a|b :\Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : ac = b$$

(iii) Seien M und N zwei nicht-leere Mengen, sowie $x \in M$ ein festes Element. Definiere die Relation $\sim_x$ auf $\mathrm{Abb}(M, N)$ durch

$$f \sim_x g :\Longleftrightarrow f(x) = g(x).$$

b) Geben Sie die Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelationen an:

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 20.11.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

(i) Auf $\mathbb{Z}$ die Relation $\equiv_2$.

(ii) Auf $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definiere die Relation

$$a \sim b :\Longleftrightarrow a|b \wedge b|a$$

wobei $a|b$ bedeutet, dass es ein $c \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $ac = b$.

(iii) Auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiere die Relation

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Longleftrightarrow y_2 - y_1 = 2(x_2 - x_1)$$

Aufgabe 4. ((Gruppenabgabe) 2+2+1+1 Punkte)

a) Seien $R_1, R_2 \subseteq M \times M$ Äquivalenzrelationen auf einer Menge M. Beweisen Sie, dass dann $R_1 \cap R_2$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation auf M ist.

b) Sei $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M. Wir betrachten die von R erzeugte Äquivalenzrelation $\langle R \rangle$, definiert durch

$$\langle R \rangle = \bigcap \{S \subseteq M \times M \mid R \subseteq S \text{ und } S \text{ ist eine Äquivalenzrelation}\}$$

Hierbei bezeichnet $\bigcap A$ den Schnitt aller *Elemente* der Menge A. Zeigen Sie, dass $\langle R \rangle$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

c) (i) Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R = \{(1, 2), (3, 1)\}$. Bestimmen Sie $\langle R \rangle$.

(ii) Geben Sie eine minimale Relation $S \subseteq \mathbb{Z} \times Z$ an, sodass $\langle S \rangle$ gerade $\equiv_2$ auf $\mathbb{Z}$ ist. Minimal bedeutet hier, das für jede echte Teilmenge S' von S die Menge $\langle S' \rangle$ nicht mit $\equiv_2$ übereinstimmt.

Aufgabe 5. ((Einzelabgabe) 2+2 Bonuspunkte)

In der folgenden Aufgabe ist $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die euklidische Norm auf der reelen Zahlenebene, d.h. $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Beweisen Sie, dass die Relation $\sim$ definiert durch

$$v \sim w :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda v = w$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ eine Äquivalenzrelation ist. Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse des Elements $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Die Menge aller Äquivalenzklassen dieser Relation bezeichnet man als den *reellen projektiven Raum* $\mathbb{RP}^1$.

b) Die Menge

$$S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| = 1\}$$

ist der (reelle) Einheitskreis. Sei $\sim'$ die von der Relation

$$v \sim' w :\Longleftrightarrow v = -w$$

auf S^1 *erzeugte* Äquivalenzrelation. Beweisen Sie, dass eine Bijektion $f : \mathbb{RP}^1 \to S^1 / \sim'$ existiert.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 20.11.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.