Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 2 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. ((Einzelabgabe) 2 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ endliche Mengen mit den Mächtigkeiten $|X_i| = m_i$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$$

Aufgabe 2. ((Einzelabgabe) 2+2 Punkte)

Sei M eine Menge mit endlich vielen Elementen und $f : M \to M$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) f ist injektiv genau dann, wenn f surjektiv ist.

b) Ist f injektiv, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{id}_M = f^k$.

Aufgabe 3. ((Gruppenabgabe) 1+2 Punkte)

Seien M, N Mengen, $E \subseteq M$ und $C, D \subseteq N$ beliebige Teilmengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Beweisen Sie:
$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

b) Beweisen Sie:

(i) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$

(ii) $f^{-1}(f(E)) \supseteq E$

(iii) Ist f surjektiv, so gilt sogar $f(f^{-1}(C)) = C$.

(iv) Ist f injektiv, so gilt sogar $f^{-1}(f(E)) = E$.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 13.11.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Aufgabe 4. ((Gruppenabgabe) 2+3 Punkte)

a) Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen den Mengen X, Y, Z. Zeigen Sie:

   (i) Wenn f und g injektiv sind, dann ist $g \circ f$ injektiv.

   (ii) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $g \circ f$ surjektiv.

b) Es seien X, Y Mengen. Wir bezeichnen mit $\mathrm{id}_M : M \to M$ die jeweilige Identitätsabbildung. Zeigen Sie:

   (i) Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

   (ii) Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
   Hinweis: Sie dürfen für "$\Rightarrow$" das Auswahlaxiom verwenden, das besagt: Für jede Menge A existiert eine Auswahlfunktion $h : \mathfrak{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$, sodass $h(B) \in B$ für alle $B \subseteq A$.

   Folgern Sie: Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Aufgabe 5. ((Gruppenabgabe) 2 Bonuspunkte)

Bewerten Sie den folgenden "Beweis":

Behauptung: Auf einer Erstsemester-Party mit $n \geq 1$ Gästen heißt jeder gleich.
Induktionsanfang: Wenn auf der Party nur ein Gast ist (lame!), ist die Aussage wahr (weil es nur einen Namen gibt).
Induktionsschritt: Angenommen auf der Party sind $n + 1$ Erstis. Wir schicken einen raus. Dann sind auf dieser Party nur noch n Erstis. Nach Induktionsvoraussetzung haben all diese n Erstis den gleichen Namen. Nun holen wir den Ersti, der draußen stand, wieder rein und schicken einen anderen raus. Nun haben nach Induktionsvoraussetzung wieder alle den gleichen Namen. Also müssen alle $n + 1$ Gäste den gleichen Namen haben.
Daraus folgt, dass alle Gäste auf einer Erstsemester-Party gleich heißen.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 13.11.23 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.