Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 13 zur Lineare Algebra I

Für diesen Zettel erfolgt keine Abgabe mehr, er dient zu Ihrer Übung. Lösungsvorschläge werden im Verlauf der nächsten Woche im CMS erscheinen.

Aufgabe 1. ((Keine Abgabe))

a) Für drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Vektoren

$$v_a := \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad v_b := \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad v_c := \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A := (v_a \mid v_b \mid v_c)$ in Abhängigkeit von a, b und c. Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ bilden v_a, v_b, v_c eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

b) Für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ betrachten wir die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots x_2^{n-1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(V) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$ gilt.

Aufgabe 2. ((Keine Abgabe))

Wir betrachten die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 3. ((Keine Abgabe))

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$.

a) Zeigen Sie, dass A und A^t die gleichen Eigenwerte haben.

b) Zeigen Sie, dass $\det(A) = c_0$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass für die $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ die Gleichung $\mathrm{Spur}(A) = (-1)^{n-1} c_{n-1}$ gilt.

d) Folgern Sie, dass die Spur einer Matrix eine Ähnlichkeitsinvariante ist, d.h. sind zwei Matrizen ähnlich, dann haben sie auch die gleiche Spur.
Erinnerung: Zwei Matrizen A, B sind ähnlich, falls es eine invertierbare Matrix S gibt, sodass $A = SBS^{-1}$.

Aufgabe 4. ((Keine Abgabe))

Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Wir bezeichnen mit $A^{\#}$ die *Adjunkte* zu $A = (a_{i,j})_{i,j}$, das heißt die Matrix $(a'_{i,j})_{i,j}$ definiert durch

$$a'_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{j,i}),$$

wobei $A_{j,i}$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der Zeile j und der Spalte i entsteht.

a) Zeigen Sie, dass $A \cdot A^{\#} = \det(A) I_n$ gilt.

b) Sei nun A invertierbar und $b \in K^n$ beliebig. Wir bezeichnen mit $A_j(b)$ die Matrix, die aus A entsteht durch Ersetzen der j-ten Spalte von A durch b. Zeigen Sie, dass der Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ mit

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

die eindeutige Lösung des LGS $Ax = b$ ist.

Aufgabe 5. ((Keine Abgabe))

Sei V ein K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus mit $\phi^2 = 4 \cdot \mathrm{id}_V$.

a) Zeigen Sie, dass ϕ bijektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass alle Vektoren in $\mathrm{Bild}(\phi + 2 \cdot \mathrm{id}_V)$ Eigenvektoren von ϕ zum Eigenwert 2 sind.

c) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Bild}(\phi + 2 \cdot \mathrm{id}_V) \cap \mathrm{Kern}(\phi + 2 \cdot \mathrm{id}_V) = 0.$$

d) Folgern Sie, dass ϕ diagonalisierbar ist. Was sind die möglichen Eigenwerte von ϕ?