Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 12 zur Lineare Algebra I

Aufgabe 1. ((Einzelabgabe) 1+1 Punkte)

Seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume.

a) Zeigen Sie, dass es genau dann eine injektive lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, wenn $\dim(V) \leq \dim(W)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass es genau dann eine surjektive lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, wenn $\dim(V) \geq \dim(W)$ gilt.

Aufgabe 2. ((Einzelabgabe) 1+1+1+1+2 Punkte)

Sei $P_3 := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f(X)) \leq 3\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome von Grad kleiner gleich 3 und P_2 analog für Grad kleiner gleich 2. Wie Sie aus der Analysis wissen, ist die Ableitungsabbildung

$$\partial : P_3 \to P_2, \quad f(X) \mapsto f'(X)$$

eine lineare Abbildung.

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_{C,B}(\partial)$ für die geordneten Basen

$$B = (1, X, X^2, X^3) \quad \text{und} \quad C = (1, X, X^2)$$

b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{B,B'}$ und $M_{C',C}$ für die geordneten Basen

$$B' = (1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3) \quad \text{und} \quad C' = (X^2, X, 1).$$

c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $M_{C'',C'}$ für

$$C'' = (2X^2 + X, X - 1, X^2)$$

d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_{C'',B'}(\partial)$.

e) Beschreiben Sie die folgende Differentialgleichung als lineares Gleichungssystem in P_3 und finden Sie die Lösungsmenge in P_3:

$$f(X) = f'(X) \cdot (X + 1) + 1.$$

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 05.02.2024 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Aufgabe 3. ((Gruppenabgabe) 2+2 Punkte)

a) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome $\mathbb{R}[X]$ zusammen mit dem Untervektorraum $U := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) = f(2)\}$. Zeige, dass $\mathbb{R}[X]/U \cong \mathbb{R}$ gilt.
Hinweis: Homomorphiesatz.

b) Wir betrachten die Untervektorräume

$$U := \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle, \quad V := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle, \quad W := \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^4$ die direkte Summe von U, V und W ist.

Aufgabe 4. ((Gruppenabgabe) 1+2 Punkte)

Es seien U und W Unterräume eines K-Vektorraumes V.

a) Betrachten Sie die Abbildung $f : W \to V/U, w \mapsto w + U$ und folgern Sie, dass gilt

$$W/(W \cap U) \cong (W + U)/U$$

b) Nun sei W ein Unterraum von U und U ein Unterraum von V. Beweisen Sie

$$(V/W)/(U/W) \cong V/U.$$

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 05.02.2024 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.