Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 11 zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1. ((Einzelabgabe) 2+2 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Vektoren in K^3

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beantworten Sie (wie immer mit Begründung) für die drei Körper $K := \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{R}$ die folgenden Fragen:

a) Ist v_1, v_2, v_3 eine Basis von K^3?

b) Gilt $w \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$?

Aufgabe 2. ((Einzelabgabe) 2+2+2 Punkte)

Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume

$$\begin{aligned} P_n &:= \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \le n\} \\ &= \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid a_i \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

der reellen Polynome von Grad kleiner gleich n mit der üblichen Addition und Multiplikation.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $U := \{f \in P_3 \mid f(0) = 0 \text{ und } f(1) = 0\}$ ein Untervektorraum von P_3 ist und bestimmen Sie eine Basis B von U.

b) Zeigen Sie, dass $B \cup \{X, X-1\}$ eine Basis von P_3 ist.

Nun sei

$$\mathrm{int} : P_2 \to P_3, f \mapsto \mathrm{int}(f), \text{ wobei } \mathrm{int}(f)(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

die Stammfunktionsabbildung.

c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_{S,B}(\mathrm{int})$ bezüglich der geordneten Basen $S := (1, X, X^2, X^3)$ für P_3 und $B = (X^2 + X + 1, \pi X - 2, 2X^2 - X + 1)$ für P_2.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 29.02.24 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Definition. Eine Ebene $E := v + U := \{v + u \mid u \in U\}$ in einem K-Vektorraum V ist die Verschiebung eines zweidimensionalen Untervektorraums U um einen Vektor $v \in V$. Eine Gerade ist das Analoge für einen eindimensionalen Vektorraum U.

Aufgabe 3. ((Gruppenabgabe) 1+2+1 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und U, W zwei endlich-dimensionale Untervektorräume von V.

a) Zeigen Sie für den Fall, dass auch V endlich-dimensional ist, dass $\dim(U) \leq \dim(V)$.

b) Zeigen Sie, dass folgende Gleichheit gilt:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Hinweis: Ergänzen Sie eine Basis von $U \cap W$.

c) Zwei Ebenen $E_1 = v_1 + U_1$ und $E_2 = v_2 + U_2$ heißen parallel, wenn $U_1 = U_2$ gilt. Zeigen Sie, dass zwei Ebenen $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ entweder parallel sind oder als Schnitt eine Gerade haben.

Aufgabe 4. ((Gruppenabgabe) 2 Punkte)

Seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ den Raum der linearen Abbildungen von V nach W. Beweisen Sie

$$\dim(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 29.02.24 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.