Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. L. Pernak

Übungsblatt Nr. 10 zur Lineare Algebra I

Aufgabe 1. ((Einzelabgabe) 3 Punkte)

Beweisen Sie, dass der kanonische Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ in einen beliebigen unitären Ring $(R, +, \cdot)$ tatsächlich ein Homomorphismus von unitären Ringen ist.

Aufgabe 2. ((Einzelabgabe) 1+1+1+1 Punkte)

Wir betrachten die Teilmenge $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Ring bildet.

b) Finde eine weitere Einheit $x \notin \{\pm 1\}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

c) Beweisen Sie dass die Darstellung $a + b\sqrt{2}$ für Elemente aus $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ eindeutig ist, d.h. es gibt keine verschiedenen Wahlen für $a, b \in \mathbb{Z}$, die dieselbe Zahl beschreiben. Hierbei dürfen Sie verwenden, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

d) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^{2\times 2}, a + b\sqrt{2} \mapsto \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 3. ((Gruppenabgabe) 1+1+2 Punkte)

Seien V und W zwei K-Vektorräume und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

a) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Hom}(V, W)$ ein K-Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$ ist.

b) Sei $M \subseteq V$ eine Menge sodass $\phi(M) = \{\phi(v) \mid v \in M\}$ linear unabhängig ist. Zeigen Sie, dass dann auch M linear unabhängig ist.

c) Sei nun M eine Basis von V. Zeigen Sie, dass ϕ genau dann injektiv ist, wenn $\phi(M)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 4. ((Gruppenabgabe) 4 Punkte)

Lösen Sie das folgende LGS über den Körpern $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_5$:

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & +3x_3 & +2x_4 & = 5 \\ -x_1 & +7x_2 & & -6x_4 & = 10 \\ 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = 20 \\ -2x_1 & +7x_2 & & +6x_4 & = 15 \end{array}$$

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 22.01.24 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.

Aufgabe 5. ((Einzelabgabe) 1+1+2 Bonuspunkte)

a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass in dieser Vektorraumstruktur die Elemente $1, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

c) Beweisen Sie, dass auch das System $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ linear unabhängig ist.

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt sollen bis spätestens Montag den 22.01.24 um 12:00 online im CMS abgegeben werden. Bitte stellen Sie sicher, dass in Ihrer Abgabe Name und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder gut lesbar enthalten sind.