UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zum Vorkurs für Mathematik
Wintersemester 2024/2025

Blatt 6
Besprechung: Donnerstag, 10.10.2024 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1. Fertigen Sie eine Tabelle aller Verknüpfungen $g \circ h$ für $g, h \in D_4$ an. Lesen Sie daran das neutrale Element und die inversen Elemente ab und überzeugen Sie sich, dass D_4 eine nicht-abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 2. Überprüfen Sie, ob die folgenden Objekte Gruppen sind. Was ist jeweils das neutrale Element? Welche Gruppen sind abelsch?

(a) $(\mathbb{Z}_2, +)$, mit $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ und der Addition definiert durch:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

(b) $(\mathbb{Q}, +)$.

(c) $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$.

(d) $\mathbb{Z}^2$ versehen mit $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$.

(e)* $S_n := \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid f \text{ ist bijektiv}\}$ mit $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

Aufgabe 3. Es seien

$$X_1 := \{1, 2, 3\}, \qquad X_2 := \{1, 2, 3, 4\}, \qquad X_3 := \mathbb{R}.$$

Finden Sie – wenn möglich – für jedes $i, j \in \{1, 2, 3\}$ jeweils Abbildungen $f_1, f_2, f_3, f_4 : X_i \to X_j$, so dass

(a) f_1 weder injektiv, noch surjektiv,

(b) f_2 injektiv, aber nicht surjektiv,

(c) f_3 nicht injektiv, aber surjektiv,

(d) f_4 bijektiv ist.

Zur Erinnerung: Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

(a) *injektiv*, falls für alle $x, y \in X$ gilt: $f(x) = f(y)$ impliziert $x = y$.

(b) *surjektiv*, falls es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.

(c) *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.