Fachrichtung Mathematik
Moritz Weber
Marcel Scherer
Jonas Metzinger

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät für Mathematik und Informatik

Operatoralgebren Blatt 1

keine Abgabe, Besprechung am Montag, dem 14. April

Aufgabe 1 (0 Punkte)
Zeige für einen Hilbertraum H und Operatoren $U, V, P \in \mathcal{B}(H)$:

(a) V ist genau dann eine Isometrie, wenn $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$.

(b) U ist unitär (d.h. $U^*U = UU^* = id_H$) genau dann, wenn U ein Hilbertraumisomorphismus ist.

(c) P ist eine Projektion genau dann, wenn es einen abgeschlossenen Unterraum $K \subset H$ gibt, sodass $P(x + y) = x$ für $x + y \in K \oplus K^\perp = H$.

Hinweis: Diese Aussage ist Proposition 1.34 im ISem24-Skript. Man sollte die Aussage entweder selber beweisen oder den dortigen Beweis nachvollziehen.

Ein linearer stetiger Operator V heißt *partielle Isometrie*, falls $VV^*V = V$.

Aufgabe 2 (0 Punkte)
Sei V ein linearer stetiger Operator auf einem Hilbertraum H. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) V ist eine partielle Isometrie.

(b) V^*V ist eine Projektion.

(c) VV^* ist eine Projektion.

(d) Es gibt einen Unterhilbertraum $K \subset H$, sodass $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle$ und $Vz = 0$ für alle $z \in K^\perp$.

Aufgabe 3 (0 Punkte)
Sei X eine Menge, dann ist $(e_x)_{x\in X}$, definiert als $e_x : \ell^2(X) \to \mathbb{C}, (a_y)_{y\in X} \mapsto a_x$ für $x \in X$, eine orthonormale Basis von $\ell^2(X)$.

(a) Für $X = \mathbb{N}$ gibt es einen linearen stetigen Operator S auf $\ell^2(\mathbb{N})$ mit $Se_n = e_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dieser wird *unilateraler Shift* genannt. Zeige:

  (i) Der adjungierte Operator S^* von S erfüllt $S^*e_n = e_{n-1}$ für alle $1 \le n \in \mathbb{N}$ und $S^*e_0 = 0$.

  (ii) S ist eine Isometrie, aber nicht unitär.

(b) Für $X = \mathbb{Z}$ ist der *bilaterale Shift* $\tilde{S}$ auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ definiert durch $\tilde{S}(e_n) = e_{n+1}$ für $n \in \mathbb{Z}$. Entscheide, natürlich mit Beweis, ob $\tilde{S}$ unitär ist.

(c) Definiere, für $1 \leq N \in \mathbb{N}$, einen Operator auf $\ell^2(X)$ für $X = \{1, \ldots, N\}$ den man als Analogon zu $\tilde{S}$ sehen kann.