UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Moritz Weber
M.Sc. Luca Junk

Höhere Mathematik für Ingenieur:innen IV b
Sommersemester 2024

Übungsblatt 4
Abgabe 14.06.24 bis 12 Uhr in den Briefkästen in E2 5

Definition. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in (0, \infty)$. Wir definieren

- die offene Kreisscheibe $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$,
- die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ und
- den Kreis $\kappa_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$,

jeweils mit Radius r und Mittelpunkt z_0. Wir identifizieren im Folgenden $\kappa_r(z_0)$ mit der Parametrisierung

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0 + r\exp(\mathrm{i}t).$$

Satz (Cauchysche Integralformel)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei weiterhin $z_0 \in U$ und $r \in (0, \infty)$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subseteq U$. Für alle $w \in B_r(z_0)$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie mit der Eulerschen Formel, dass die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{\kappa_3(2+\mathrm{i})} \frac{\exp(z^2)}{z - 2} \mathrm{d}z$

(ii) $\displaystyle\int_{\kappa_1(3+\mathrm{i})} \frac{\exp(z^2)}{z - 2} \mathrm{d}z$

(iii) $\displaystyle\int_{\kappa_5(0)} \frac{z^5 + 2z^4 - z + 1}{(z + 1)^4} \mathrm{d}z$

Definition. Sei γ ein geschlossener Integrationsweg und $w \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\gamma)$. Die *Windungszahl* oder *Umlaufzahl* von γ um z ist

$$n_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} \mathrm{d}\xi.$$

(Mit dieser Definition ist ein Gebiet G genau dann einfach zusammenhängend, wenn $n_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$ und alle geschlossenen Integrationswege γ in G gilt.)

Bemerkung. Anschaulich können Sie sich die Windungszahl so vorstellen: Sie stehen in der komplexen Ebene auf dem Punkt z_0 und halten die Leine eines Hundes in der Hand. Der Hund läuft den Integrationsweg γ ab. Die Windungszahl gibt nun an, wie oft die Leine am Ende um ihre Beine gewickelt ist (Wicklung gegen den Uhrzeigersinn wird positiv gezählt, mit dem Uhrzeigersinn negativ).

Passend zu dieser Anschauung kann man mathematisch beweisen, dass die Umlaufzahlen immer ganze Zahlen sind und auf Wegzusammenhangskomponenten konstant sind (zwei Punkte liegen in der selben Komponente, wenn sie durch einen Integrationsweg verbunden werden können, der $\mathrm{Spur}(\gamma)$ nicht schneidet).

Weiterführende Informationen zur Windungszahl finden Sie beispielsweise in [2, Kapitel 6.2] und [1, Kapitel III.6].

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

(a) Sei γ ein geschlossener Integrationsweg. Zeigen Sie, dass $n_{\gamma^-}(z) = -n_\gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\gamma)$. Hierbei ist γ^- der zu γ entgegengesetzte Integrationsweg wie auf Übungsblatt 3 definiert.

(b) Sei $r \in (0, \infty)$ und $z_0 \in \mathbb{C}$.

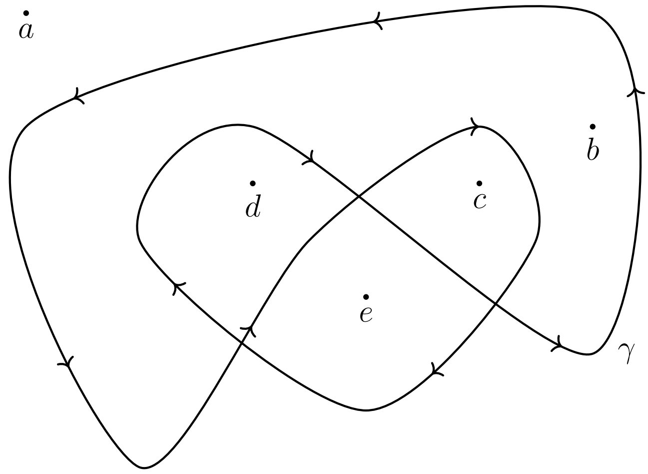
  (i) Sei $m \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie $n_\gamma(z_0)$ für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0 + \exp(\mathrm{i}mt)$.

  (ii) Zeigen Sie, dass

$$n_{\kappa_r(z_0)}(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z \in B_r(z_0), \\ 0, & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zur graphischen Bestimmung von Windungszahlen zeichnen und betrachten wir nur glatte Wege, die einfach durchlaufen werden und sich selbst nur transversal schneiden (alle Kreuzung sind so gewählt, dass klar ist, wo der Weg "geradeaus" weitergeht).

(a) Bestimmen Sie die Windungszahlen der eingetragenen fünf Punkte bezüglich γ:



(b) Skizzieren Sie einen geschlossenen Weg γ mit $n_\gamma(-1) = -1$ und $n_\gamma(1) = 3$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Welche der folgenden Integrale haben den Wert 0 und welche nicht?

(a) $\displaystyle\int_{\kappa_2(2)} \frac{z^2-4}{z^2-1}\mathrm{d}z$

(b) $\displaystyle\int_{\kappa_2(0)} \frac{z}{z^2-4z+3}\mathrm{d}z$

(c) $\displaystyle\int_{\kappa_2(3i)} \frac{z^2+4}{(2i-z)z}\mathrm{d}z$

Literatur

[1] Eberhard Freitag und Rolf Busam. *Funktionentheorie 1*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin, Heidelberg, 2006.

[2] Klaus Jänich. *Funktionentheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin, Heidelberg, 2004.