UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Moritz Weber
M.Sc. Luca Junk

Höhere Mathematik für Ingenieur:innen IV b
Sommersemester 2024

Übungsblatt 3
Abgabe 31.05.24 bis 12 Uhr in den Briefkästen in E2 5

Definition. Seien $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\tilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{C}$ zwei Integrationswege in $\mathbb{C}$.

- Der zu γ *entgegengesetzte* Integrationsweg ist $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \gamma(a + b - t)$.
- Der aus γ und $\tilde{\gamma}$ *zusammengesetzte* Integrationsweg ist
$$\gamma \oplus \tilde{\gamma} : [a, b + d - c] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma(t), & \text{falls } t \in [a, b], \\ \tilde{\gamma}(t + c - b), & \text{falls } t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$
- Für $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ ist $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0 + t(z_1 - z_0)$ der Integrationsweg, der die direkte Verbindung von z_0 nach z_1 in der komplexen Ebene realisiert. Wir schreiben auch $\gamma = [z_0, z_1]$ und definieren den *Polygonzug* entlang $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ als
$$[z_0, z_1, \dots, z_n] := [z_0, z_1] \oplus [z_1, z_2] \oplus \dots \oplus [z_{n-1}, z_n]$$

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{10z^6 + 4z^2 + 7}{z^2}\,\mathrm{d}z$ für ein $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(a) = \mathrm{i}$, $\gamma(b) = -\mathrm{i}$ und $0 \notin \operatorname{Spur}(\gamma)$.

(b) $\displaystyle\int_{[1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i},1]} \operatorname{Im}(z)\,\mathrm{d}z$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Seien $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\tilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{C}$ Integrationswege in $U \subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{\gamma\oplus\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z$

(b) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$

Bitte wenden.

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass $z_0 + z_1 + z_2 = 0$ ist, wobei z_0, z_1, z_2 die dritten Einheitswurzeln sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Summe der fünften Einheitswurzeln ebenfalls 0 ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Summe der $2n$-ten Einheitswurzeln 0 ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte).

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(i) $I_1 := \int_{[-1-\mathrm{i},1-\mathrm{i}]} z^2 \, \mathrm{d}z$

(ii) $I_2 := \int_{[1-\mathrm{i},1+\mathrm{i}]} z^2 \, \mathrm{d}z$

(iii) $I_3 := \int_{[1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i}]} z^2 \, \mathrm{d}z$

(iv) $I_4 := \int_{[-1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i}]} z^2 \, \mathrm{d}z$

(b) Zeigen Sie, dass $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$.