§ 2.5 Zweipunkt-Randwertprobleme

2.31 Randwertprobleme und Schießverfahren:

(1) Betrachte DGL der Form

(1. RWP) $$y'' = f(x, y, y') \qquad x \in (a, b)$$
$$y(a) = \eta_a \;, \quad y(b) = \eta_b$$

2-Punkt-Randwertproblem (boundary value problem, BVP)

(Schwingungsverhalten eine Saite oder Membran, Belastung eines an 2 Punkten aufliegenden Balken, Bewegungsgleichung für Satellite)

(2. RWP) $$y'' = f(x, y, y')$$
$$y(a) = \eta_a \;, \quad y'(b) = \eta_b$$

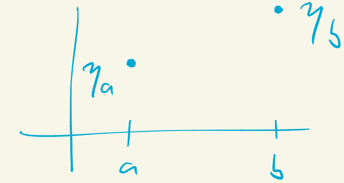
oder

(3. RWP) $$y'' = f(x, y, y')$$
$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = \eta_a \qquad \gamma y(b) + \delta y'(b) = \eta_b \qquad \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 > 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 > 0 \end{array}$$

(2) Idee: Statt

(1.RWP) $y'' = f(x, y, y')$, $x \in (a,b)$

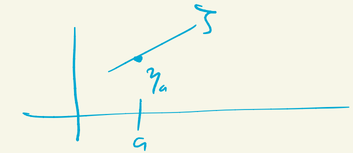
$y(a) = \eta_a \;,\; y(b) = \eta_b$



betrachte

(AWP) $y'' = f(x, y, y')$

$y(a) = \eta_a \;,\; y'(a) = \zeta$

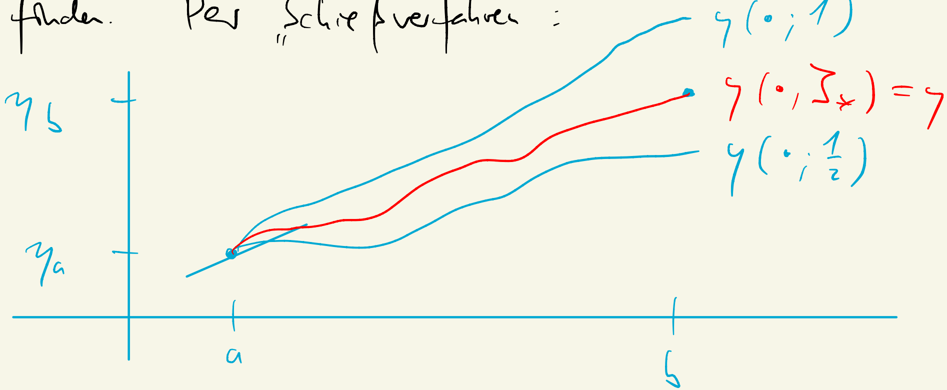


und bestimme Lösungen $y(\cdot\,;\zeta) : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $y(b;\zeta_*) = \eta_b$

Muss also Nullstelle ζ_* von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(\zeta) := y(b;\zeta) - \eta_b$$

finden. Per „Schießverfahren":



Löse dieses AWP in Abhängigkeit von ζ durch frühere Verfahren und erhalte so mehrere Lösungen $y(\cdot\,;\zeta)$ bzw. die Fkt. g

Wie findet man nun Nst. von g? (§1)

(3) Bisektionsverfahren (zur Findung von Nst. ξ_* mit $g(\xi_*)=0$):

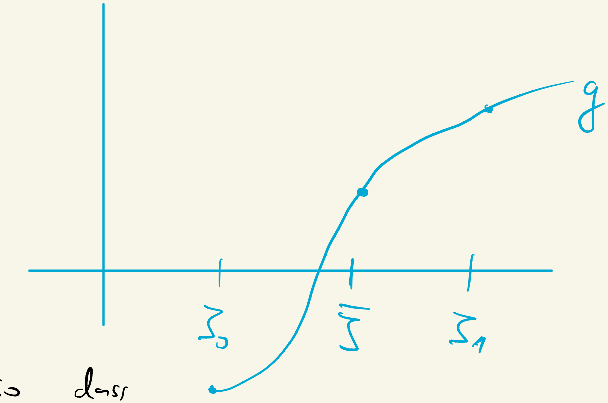
Seien $\xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}$ mit $g(\xi_0) < 0 < g(\xi_1)$.

Berechne $\bar{\xi} := \frac{1}{2}(\xi_0 + \xi_1)$

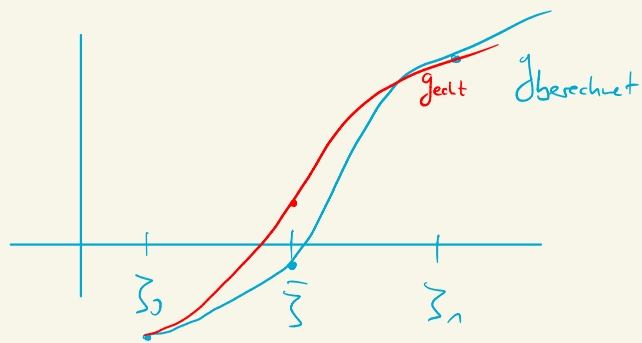
Ist $g(\bar{\xi}) < 0$, setze $\xi_0 := \bar{\xi}$, $\xi_1 := \xi_1$

Ist $g(\bar{\xi}) > 0$, setze $\xi_0 := \xi_0$, $\xi_1 := \bar{\xi}$

Iteriere.



Problem: kleine Fehler bei der Lösung des AWP können leicht falsche Funktionswerte für g produzieren, so dass $g(\bar{\xi}) > 0$ statt $g(\bar{\xi}) < 0$ herauskommen kann. Suche dann im falschen Intervall!



(4) Fixpunktiteration (zur Findung von Nst. ζ_* mit $g(\zeta_*)=0$):

$$\zeta_{k+1} := \zeta_k - \varepsilon\, g(\zeta_k) =: \Phi(\zeta_k)$$

Wähle ε so, dass Φ kontrahierend ist $\rightsquigarrow$ Banachsches Fixpunktverfahren

(5) Newtoniteration (zur Findung von Nst. ζ_* mit $g(\zeta_*)=0$):

$$\zeta_{k+1} := \zeta_k - \frac{g(\zeta_k)}{g'(\zeta_k)}$$

Muss hierbei allerdings auch g' berechnen, also $\quad (g(\zeta) = y(b;\zeta) - \eta_b)$

$$g'(\zeta) = y_\zeta(b;\zeta) := \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big((x,\zeta) \longmapsto y(x;\zeta)\Big)_{|x=b}$$

Spezialfall $\quad y'' = f(x,y) \quad$ (anstatt $f(x,y,y')$)

$$y(a) = \eta_a \quad , \quad y'(a) = \zeta$$

Betrachte dann $\quad y''(x,\zeta) = f(x, y(x,\zeta))$

$$y(a,\zeta) = \eta_a \, , \quad y'(a,\zeta) = \zeta$$

Betrachte dann $y''(x,\zeta) = f(x, y(x,\zeta))$

$y(a,\zeta) = y_a$, $\quad y'(a,\zeta) = \zeta$

Also $\frac{\partial}{\partial \zeta} y''(x,\zeta) = f_y(x, y(x,\zeta))\, y_\zeta(x,\zeta)$

$\overset{\text{falls Ableitungen vertauschen}}{=} y_\zeta''(x,\zeta)$

mit $f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left((x,y) \mapsto f(x,y)\right)$

[also $\frac{\partial}{\partial \zeta} f(x, y(x,\zeta)) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left((x,\zeta) \mapsto f(x,\cdot) \circ y(x,\zeta)\right)$]

$\frac{\partial}{\partial \zeta} y(a,\zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta} y_a$, $\quad y_\zeta'(a,\zeta) = 1$

$y_\zeta(a,\zeta) = 0$

---

habe also $y_\zeta''(x,\zeta) = f_y(x, y(x,\zeta))\, y_\zeta(x,\zeta)$

(AWP) $y_\zeta(a,\zeta) = 0 \qquad y_\zeta'(a,\zeta) = 1$

Benutze hier y, d.h. y_k im Näherungsverfahren

$\rightsquigarrow$ erhalte $y_\zeta(x,\zeta)$ und also $g'(\zeta) = y_\zeta(b,\zeta)$