Konsistenzordnung und Taylor-Entwicklung

Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

mit explizitem Einschrittverfahren

$$x_k = x_0 + kh, \quad y_{k+1} = y_k + h \cdot \Phi(x_k, y_k, h)$$

2.21 Erinnerung

- lokaler Diskretisierungsfehler:

$$d_{k+1} = y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\,\Phi(x_k, y(x_k), h)$$

- globaler Diskretisierungsfehler

$$g_k = y(x_k) - y_k$$

2.22 Definition

Ein Verfahren hat Konsistenzordnung $p \in \mathbb{N}$, falls

$$d_k = O(h^{p+1}), \text{ d.h. } \limsup_{h \to 0} \frac{d_k}{h^{p+1}} < \infty.$$

Alternativ: $\max\limits_{1 \le k \le n} |d_k| = O(h^{p+1})$ (Fehlerordnung)

Korollar 2.12 zeigt

Konsistenzordnung $p \Rightarrow |g_k| = O(h^p)$

Wie bestimmt man allgemein die Konsistenzordnung eines Verfahrens?

$\Rightarrow$ Taylorentwicklung

2.23 Eindimensionale Taylor-Formel

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f: I \to \mathbb{R}$ eine C^{n+2}-Funktion

Dann gilt

$$f(x+h) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k}_{\text{Taylor Polynom}} + \underbrace{R_n(x,h)}_{\text{Restglied}}$$

wobei

$$R_n(x,h) = O(h^{n+1}) \quad \text{d.h.} \quad \limsup_{h \to 0} \frac{R_n(x,h)}{h^{n+1}} < \infty$$

2.24 Beispiel

Für das vorherige Anfangswertproblem liefert die Taylor-Formel:

$$y(x_k+h) = y(x_k) + h \cdot y'(x_k) + \frac{1}{2} h^2 y''(x_k) + O(h^3)$$

mit

$$y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$$

$$y''(x_k) = \frac{d}{dx} f(x_k, y(x_k))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(x_k, y(x_k)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_k, y(x_k)) \cdot f(x_k, y(x_k))$$

2.25 Konsistenzordnung: Eulerverfahren

Der Diskretisierungsfehler des expliziten Eulerverfahrens ist

$$d_{k+1} = \underbrace{y(x_{k+1})}_{y(x_k+h)} - y(x_k) - h \cdot f(x_k, y(x_k))$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} y(x_k) + h \cdot f(x_k, y(x_k)) + O(h^2) - y(x_k) - h \cdot f(x_k, y(x_k))$$

$$= O(h^2)$$

Das explizite Eulerverfahren hat Konsistenzordnung 1 (siehe auch Beispiel 2.13)

Für allgemeine Runge-Kutta Verfahren benötigen wir die mehrdimensionale Taylor-Formel

2.26 Notation

Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$. Dann schreiben wir

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$$

$$D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$x^\alpha = x_1^\alpha \cdots x_m^\alpha \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^m$$

2.27 Mehrdimensionale Taylorformel

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine C^{n+2}-Funktion

Dann gilt

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le n} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + R_n(x,h)$$

wobei

$$R_n(x,h) = O(\|h\|^{n+1}) \quad \text{d.h.} \quad \limsup_{h \to 0} \frac{R_n(x,h)}{\|h\|^{n+1}} < \infty$$

2.28 Beispiel

Betrachte $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(m=2)$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$|\alpha| = 0$: $\alpha = (0,0)$ mit $\frac{1}{0!0!} f(x)$

$|\alpha| = 1$: $\alpha = (1,0)$ " $\frac{1}{1!0!} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) h_1$

$\alpha = (0,1)$ " $\frac{1}{0!1!} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) h_2$

$|\alpha| = 2$: $\alpha = (2,0)$ " $\frac{1}{2!0!} \frac{\partial}{\partial x_1^2} f(x) h_1^2$

$\alpha = (1,1)$ " $\frac{1}{1!1!} \frac{\partial}{\partial x_1 x_2} f(x) h_1 h_2$

$\alpha = (0,2)$ " $\frac{1}{0!2!} \frac{\partial}{\partial x_1^2} f(x) h_2^2$

$$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) h_2$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^2} f(x) h_1^2 + 2 \frac{\partial}{\partial x_1 x_2} f(x) h_1 h_2 + \frac{\partial}{\partial x_2^2} f(x) h_2^2 \right)$$

$$+ O(\|h\|^3)$$

2.29 <u>Konsistenzordung: zweistufige Verfahren</u>

Betrachte das zweistufige Einschrittverfahren

$$x_k = x_0 + k \cdot h$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \left(c_1 k_1(x_k, y_k) + c_2 k_2(x_k, y_k) \right)$$

mit $a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und

$$k_1 = f(x, y)$$
$$k_2 = f(x + ha, \; y + hb\, k_1(x, y))$$

Wann hat das Verfahren Konsistenzordnung 1 ?

Eine Taylorentwicklung liefert

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + h f(x_k, y(x_k)) + O(h^2)$$

$$k_2(x_k, y(x_k)) = f(x_k + ha, \; y(x_k) + bh\, k_1(x_k, y(x_k)))$$
$$= f(x_k, y(x_k)) + O\left(\left\| \begin{pmatrix} ha \\ hb\, k_1(x_k, y(x_k)) \end{pmatrix} \right\|^1 \right)$$

wobei

$$\left\| \begin{pmatrix} h\, a \\ h\, b\, k_1(x_k, y(x_k)) \end{pmatrix} \right\| = |h| \cdot \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \cdot f(x_k, y(x_k)) \end{pmatrix} \right\| = O(h)$$

Damit folgt

$$d_{k+1} = y(x_{k+1}) - y(x_k)$$
$$- h \cdot \left(c_1 k_1(x_k, y(x_k)) + c_2 k_2(x_k, y(x_k)) \right)$$

$$= y(x_k) + h f(x_k, y(x_k)) + O(h^2) - y(x_k)$$
$$- h c_1 f(x_k, y(x_k)) - h c_2 \left(f(x_k, y(x_k)) + O(h) \right)$$

$$= h f(x_k, y(x_k)) - h c_1 f(x_k, y(x_k))$$
$$- h c_2 f(x_k, y(x_k)) + O(h^2)$$

$$= h \cdot (1 - c_1 - c_2) \cdot f(x_k, y(x_k)) + O(h^2)$$

Also gilt $d_k = O(h^2)$ wenn

$$1 - c_1 - c_2 = 0 \iff c_1 + c_2 = 1$$