21.5.2024

2. Numerische Lösungsverfahren gewöhnlicher Differentialgleichungen [= Bärwolff 8]

§2.1 Beispiele gewöhnlicher DGL (engl ODE)

2.1 Motivation: gewöhnliche DGL.

Suche (diffbare) Lösung $y: I \to \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y_i: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

von

$$y'(x) = F(x, y(x))$$
$$y(x_0) = y_0$$

Anfangswertproblem 1. Ordnung

mit $F: I \times D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, stetig diffb. auf $U \subseteq I \times D$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$

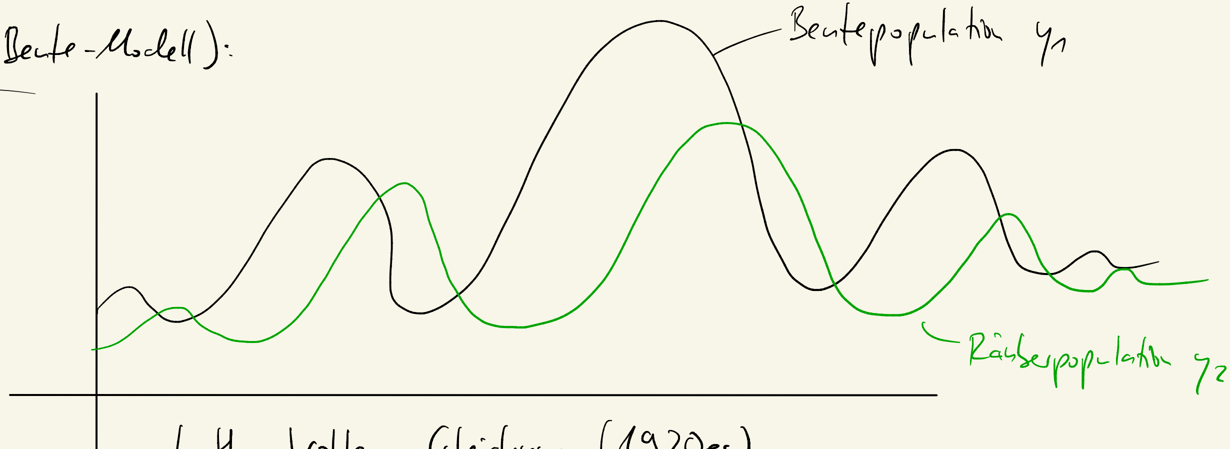
Oft wird I als Zeit verstanden, schreibe dann auch $\dot{y}(t)$ statt $y'(x)$.

$\rightsquigarrow$ ex. eind. Lösung in diesem Setting

Oft sind diese DGL nicht analytisch lösbar, d.h. haben keine Methode eine exakte Lösung zu ermitteln $\rightsquigarrow$ benötige Näherungsverfahren

Sachverhalte in der Praxis oft in Form solcher DGL modelliert: Luft- & Raumfahrt, chem. Reaktionen, autom. Produktion in Robotertechnik, Tierpopulationen, ...

2.3 Bsp. (Räuber-Beute-Modell):



Lotka-Volterra-Gleichungen (1920er)

(Problem: $y: I \to \mathbb{N}$)

$y_1(t) :=$ Anzahl der Beutetiere zum Zeitpunkt t

$y_2(t) :=$ Anzahl der Raubtiere zum Zeitpunkt t

$\varepsilon_1 :=$ Geburtenrate der Beutetiere ohne Störung (perfekte Bedingungen)

$\varepsilon_2 :=$ Geburtenrate der Raubtiere pro Beutelebewesen

$\gamma_1 :=$ Sterberate der Beutetiere pro Räuber

$\gamma_2 :=$ Sterberate der Raubtiere, wenn keine Beute vorhanden

$\exists$ analytische Lsg (Integral) $\leftarrow$

$$\dot{y}_1(t) = y_1(t)\,(\varepsilon_1 - \gamma_1 y_2(t))$$
$$\dot{y}_2(t) = y_2(t)\,(\varepsilon_2 y_1(t) - \gamma_2)$$

+ Annahmen aus Biotop

§ 2.2 Einschrittverfahren

2.4 Eulerverfahren / Polygonzugmethode / Integrationsmethode von Euler:

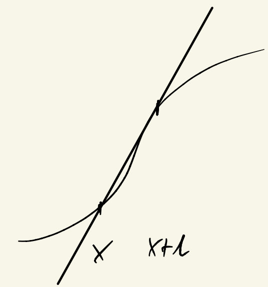
(1) Suche Lösung $y: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall von AWP

$$y'(x) = f(x, y(x))$$
$$y(x_0) = y_0$$

mit $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig diff., $x_0 \in I$

(2) Idee: Linearisiere y' per Differenzenquotienten:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}, \quad h > 0$$



Löse also $\dfrac{y(x+h) - y(x)}{h} = f(x, y(x))$

$$\Longleftarrow \quad y(x+h) = y(x) + h f(x, y(x))$$

(3) Wähle zu x_0 eine Schrittweite h und betrachte Stützstellen

$$x_k := x_0 + kh \qquad (\text{für solche } k, \text{ so dass } x_k \in I)$$

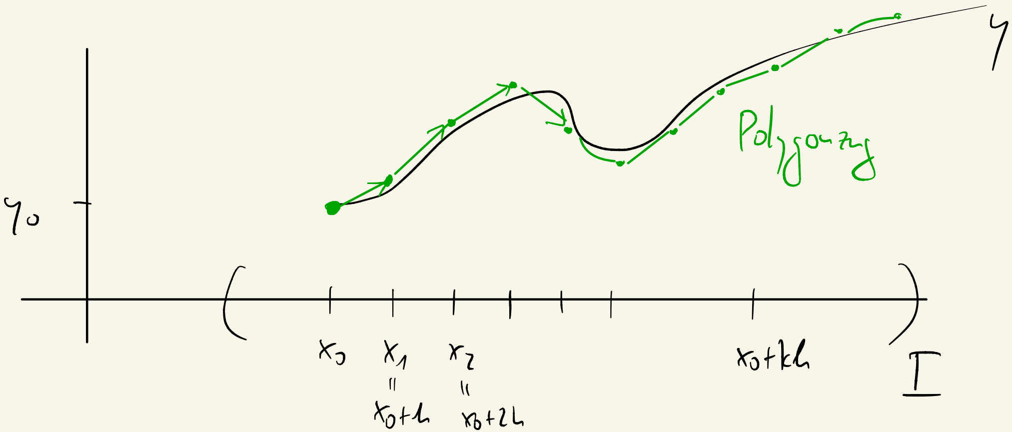
Berechne $\quad y_{k+1} := y_k + h f(x_k, y_k) \rightsquigarrow$ Näherung an $y(x_k)$

(3) Wähle zu x_0 eine Schrittweite h und betrachte Stützstellen

$$x_k := x_0 + kh$$

Berechne
$$y_{k+1} := y_k + h f(x_k, y_k) \rightsquigarrow \text{Näherung an } y(x_k)$$

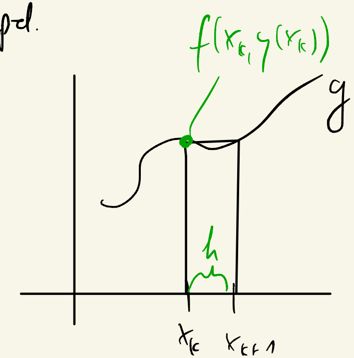
$y' = f(x,y)$



(4) Methode recht grob, nur bei kleinen h gute Werte. Dafür sehr simpel.

(5) Integral:
$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \underbrace{f(x, y(x))}_{=:g(x)}\,dx$$
$$\approx (x_{k+1} - x_k)\, g(x_k)$$
$$= h f(x_k, y(x_k))$$

$$\Rightarrow y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h f(x_k, y(x_k))$$

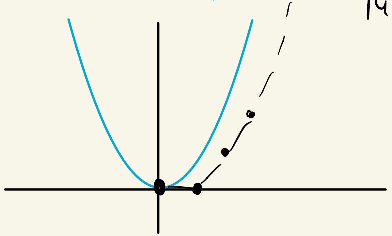


(6) Bsp.: $f(x,y) = x^2 + 2x - y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ | $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ AWP

[Weiß: $y'(x) = x^2 + 2x - y(x)$ wird gelöst durch $y(x) = x^2$]

$h = \frac{1}{2}$: Also Euler: $y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) = y_k + \frac{1}{2}(x_k^2 + 2x_k - y_k)$, $x_k = 0 + kh$
$= \frac{1}{2} y_k + \frac{1}{2} x_k^2 + x_k$, $= \frac{k}{2}$

k	x_k	$y(x_k)$	y_k	$g_k := y(x_k) - y_k$
0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$y_1 = \frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} x_0^2 + x_0 = 0$	$\frac{1}{4}$
2	1	1	$y_2 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$y_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} 1^2 + 1 = 1 + \frac{13}{16}$	$\frac{7}{16}$
4	2	4	$y_4 \approx 3{,}53$	$\approx 0{,}46$

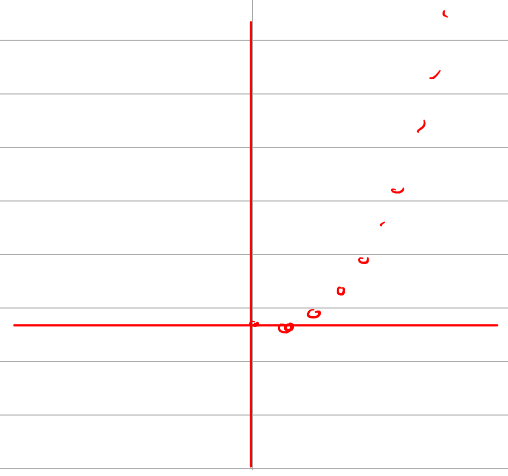


bei $h = \frac{1}{4}$: $x_k = 2 \rightsquigarrow y_k \approx 3{,}77$,
d.h. $g_k \approx 0{,}22$ besser!

- ~~55~~ -
42

Tabelle 1

h	0,5					
	x_k	y(x_k)	y_k	g_k $= y(x_k) - y_k$		
0	0	0	0	0		
1	0,5	$\frac{1}{4} =$ 0,25	0	$\frac{1}{4} =$ 0,25		
2	1	1	0,625	$\frac{3}{8} =$ 0,375		
3	1,5	$\frac{9}{4} =$ 2,25	1,8125	$\frac{7}{16} =$ 0,4375		
4	2	4	3,53125	0,46875		
5	2,5	6,25	5,765625	0,484375		
6	3	9	8,5078125	0,4921875		
7	3,5	12,25	11,75390625	0,49609375		
8	4	16	15,501953125	0,498046875		



~~-56-~~ 43

Tabelle 1

h	0,25			
	x_k	y(x_k)	y_k	g_k
0	0	0	0	0
1	0,25	0,0625	0	0,0625
2	0,5	0,25	0,140625	0,109375
3	0,75	0,5625	0,41796875	0,14453125
4	1	1	0,8291015625	0,1708984375
5	1,25	1,5625	1,371826171875	0,190673828125
6	1,5	2,25	2,04449462890625	0,20550537109375
7	1,75	3,0625	2,84587097167969	0,216629028320312
8	2	4	3,77502822875977	0,224971771240234

deutlich besser als bei $h = \frac{1}{2}$

28.5.2024

2.5 Def.: (a) Ein <u>explizites Einschrittverfahren</u> ist eine Vorschrift

$$y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(x_k, y_k, h) \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, n$$

$$x_k := x_0 + kh$$

Startwerte $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $h \geq 0$

mit einer <u>Verfahrensfunktion</u> $\Phi : [x_0, x_0 + nh] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Ein <u>implizites Einschrittverfahren</u> ist eine Vorschrift

$$y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h), \quad k = 0, \dots, n$$

$$x_k := x_0 + kh$$

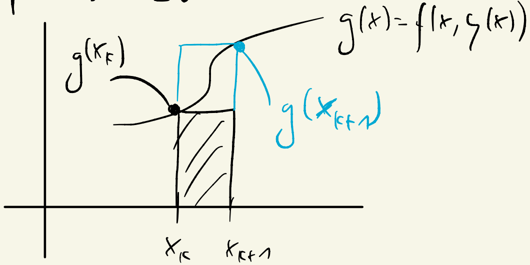
Startwerte $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $h \geq 0$

mit einer <u>Verfahrensfunktion</u> $\Phi : [x_0, x_0 + nh] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

2.6 Bsp.: (a) $\Phi(x_k, y_k, h) := f(x_k, y_k) \rightsquigarrow$ Eulerverfahren ist explizites ESV

(b) $\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h) := f(x_{k+1}, y_{k+1})$

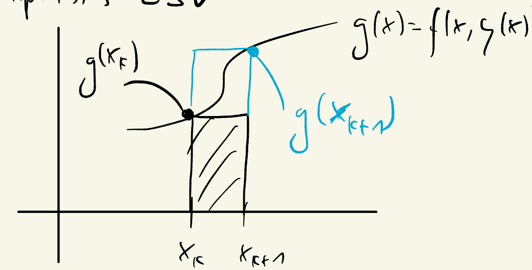
$\rightsquigarrow$ Eulerverfahren als implizites ESV



2.6 **Bsp.:** (a) $\Phi(x_k, y_k, h) := f(x_k, y_k)$ $\rightsquigarrow$ Eulerverfahren ist explizites ESV

(b) $\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h) := f(x_{k+1}, y_{k+1})$

$\rightsquigarrow$ Eulerverfahren als implizites ESV



$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx \approx (x_{k+1} - x_k) \cdot g(x_{k+1})$$

$$= h\, f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))$$

$$\Longrightarrow \quad y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h\, f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))$$

$$\rightsquigarrow \quad y_{k+1} = y_k + h\, \underbrace{f(x_{k+1}, y_{k+1})}_{\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h)}$$

2.7 Def.: (a) Für ein implizites ESV mit Verfahrensfkt Φ und Schrittweite h sowie eine exakte Lösung y des AWP

$$y'(x) = f(x, y(x))$$
$$y(x_0) = y_0$$

$$(x_k, y(x_k)) \longrightarrow \boxed{y_k - h\Phi(\ldots)} \longrightarrow y_{k+1} \approx y(x_{k+1})$$

ist $d_{k+1} := y(x_{k+1}) - \underbrace{y(x_k) - h\,\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h)}_{\text{Ergebnis des Verfahrens bei Input } x_k,\, y(x_k)}$

der „lokale Diskretisierungsfehler" an der Stelle x_{k+1}

(also die Abweichung von „berechnetem Wert $y(x_{k+1})$" und tatsächlichem Wert $y(x_{k+1})$)

beachte:
in Praxis ist y nicht bekannt (daher Verfahren, um y zu bestimmen)
in Theorie ist y bekannt, für die Fehleranalyse

(b) Der „globale Diskretisierungsfehler" an der Stelle x_k ist

$$g_k := y(x_k) - y_k$$

(also die Abweichung von der insgesamt „berechneten Fkt. $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$" von y)

$$(x_k, y_k) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y_{k+1}$$

2.8 Def.: Ein ESV erfüllt die <u>Lipschitzbedingung</u> mit <u>Lipschitzkonstante</u> $L > 0$ auf $\mathcal{B}$, falls

$$|\Phi(x,y,z,h) - \Phi(x,\tilde{y},z,h)| \leq L\,|y-\tilde{y}|$$

$$|\Phi(x,y,z,h) - \Phi(x,y,\tilde{z},h)| \leq L\,|z-\tilde{z}|$$

$$\forall\ (x,y,z,h), (x,\tilde{y},z,h), (x,y,\tilde{z},h) \in \mathcal{B} \subseteq [x_0, x_0+nh] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$$

2.9 Bem.: Ist Φ stetig auf $\mathcal{B}$ und gilt

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y,z,h)\right| \leq M \qquad \left(\forall (x,y,z,h)\right)$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,z,h)\right| \leq M$$

für die part. Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y}\Phi$, $\frac{\partial}{\partial z}\Phi$, so erfüllt Φ die L.-Bed. mit $L = M$. (MWS)

-~~63~~- 48

2.10 __Lemma:__ Sei durch Φ, h, x_0, y_0 ein implizites ESV gegeben, das die L.-Bed. mit $L>0$ erfüllt.

(a) Dann $\quad |g_{k+1}| \leq (1+hL)|g_k| + \underbrace{hL|g_{k+1}|}_{\text{entfällt, falls ESV explizit}} + |d_{k+1}|$

(b) Ist das ESV explizit und $\max_k |d_k| \leq b$, so gilt $|g_{k+1}| \leq (1+hL)|g_k| + b$

__Bew.:__ (a) Def. d_{k+1}:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h) + d_{k+1}$$

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad g_{k+1} &= y(x_{k+1}) - y_{k+1} \\
&= \cancel{y(x_k)} + h\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h) + d_{k+1} \\
&\quad - (\cancel{y_k} + h\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h)) + g_k - \cancel{y(x_k)} + \cancel{y_k} \\
&= g_k + h[\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h) - \Phi(x_k, y_k, y(x_{k+1}), h)] + d_{k+1} \\
&\quad + h[\Phi(x_k, y_k, y(x_{k+1}), h) - \Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h)]
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{Lipschitz}}{\Longrightarrow} |g_{k+1}| \leq |g_k| + \underbrace{h|\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h) - \Phi(x_k, y_k, y(x_{k+1}), h)|}_{\leq hL|y(x_k) - y_k| \leq hL|g_k|} + \underbrace{h|\Phi(x_k, y_k, y(x_{k+1}), h) - \Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h)|}_{\leq hL|y(x_{k+1}) - y_{k+1}| \leq hL|g_{k+1}|} + |d_{k+1}|$$

$\square$

2.11 Satz (Abschätzung des globalen Diskretisierungsfehlers): Sei durch Φ, h, x_0, y_0 ein ESV mit L-Bed. gegeben, so dass $hL < 1$, $\max|d_k| \le D$

(a) Seien a, b mit $|g_{k+1}| \le a|g_k| + b$ $\forall k$, dann $|g_k| \le \frac{b}{a}|e^{ka}-1| + e^{ka}|g_0|$

(b) Es gilt $|g_k| \le \frac{D}{hL} e^{khL}$ für ein explizites ESV

und $|g_k| \le \frac{D}{hK(1-hL)} e^{khK}$ für ein implizites ESV, K mit $\frac{1+hL}{1-hL} = 1+hK$

Bew: Anwendung von 2.10.

2.12 Kor: Hat ein explizites ESV die Fehlerordnung p (d.h. $\max|d_k| \le C \cdot h^{p+1}$, $C > 0$) (falls $p \ge 1$, so heißt das ESV dann „konsistent"), so ist $|g_k| \le \frac{C}{L} e^{khL} h^p$

Bew: $|g_k| \overset{2.11}{\le} \frac{D}{hL} e^{khL} \le \frac{C h^{p+1}}{hL} e^{khL} = \frac{C}{L} e^{khL} h^p$. $\square$

Geht also $h \to 0$, so geht $g_k \to 0$, d.h. der Fehler verschwindet und die berechneten Werte y_k des Verfahrens konvergieren gut gegen die tatsächlichen Werte $y(x_k)$

2.13 Bsp.: $f(x,y) = x^2 + 2x - y$ wie in 2.4(6).

$y' = f(x, y(x))$
$y(0) = 0$
AWP

Lösung: $y(x) = x^2$

Also $\Phi(x_k, y_k, h) = f(x_k, y_k) = x_k^2 + 2x_k - y_k$ explizites ESV

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\,\Phi(x_k, y(x_k), h) \\ &= x_{k+1}^2 - x_k^2 - h(x_k^2 + 2x_k - x_k^2) \\ &= x_{k+1}^2 - x_k^2 - 2h x_k \\ &= (k+1)^2 h^2 - k^2 h^2 - 2h^2 k \\ &= \cancel{k^2 h^2} + \cancel{2k h^2} + h^2 - \cancel{k^2 h^2} - \cancel{2h^2 k} \\ &= h^2 \end{aligned}$$

$x_k = x_0 + kh = kh$

Also $\max |d_k| \leq h^2$ $(C = 1)$ mit $p = 1$

und $|g_k| \leq \frac{C}{L} e^{khL} h$

2.14 verbesserte Polygonzugmethode

(1) Erinnerung Bsp. $f(x,y) = x^2 + 2x - y$ | Lsg. $y(x) = x^2$

$$y' = f(x,y)$$
$$y(0) = 0$$

Euler/Polygonzug: $y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) = (1-h) y_k + h x_k^2 + 2h x_k$, $x_k = kh$

k		$x_k = kh$		$y(x_k) = x_k^2$		y_k		$\tilde{y}$	$g_k = y(x_k) - y_k$		$\tilde{g}$
		$h=\frac{1}{2}$	$h=\frac{1}{4}$	$h=\frac{1}{2}$	$h=\frac{1}{4}$	$h=\frac{1}{2}$	$h=\frac{1}{4}$		$h=\frac{1}{2}$	$h=\frac{1}{4}$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,25	0,25	0	0,14..	0,28...	0,25	0,10..	0,03..
2	4	1	1	1	1	0,625	0,829	1,03...	0,375	0,17..	0,03...
3	6	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2,25	2,25	1,812..	2,044..	2,27..	0,437..	0,20...	0,02..
4	8	2	2	4	4	3,53..	3,77...	4,01..	0,46..	0,22...	0,01..

y_k ($h=\frac{1}{2}$) $\overset{!!}{=} a$, y_k ($h=\frac{1}{4}$) $\overset{!!}{=} b$

$\tilde{g} = \tilde{y} - y(x_k)$ Wow!

$\tilde{y} := 2b - a$ „Richardson-Extrapolation" (allgem.: $\tilde{y} := y^{(1)} + \frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{1 - \frac{h^{(2)}}{h^{(1)}}}$, hier $y^{(2)} = b$, $h^{(2)} = \frac{1}{4}$, $y^{(1)} = a$, $h^{(1)} = \frac{1}{2}$)

(2) verbesserte Methode: gegeben (x_k, y_k) berechne

$$y^{(1)}_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$
$$y^{(2)}_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)$$
$$y^{(2)}_{k+1} = y^{(2)}_{k+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f\left(x_k + \frac{h}{2}, y^{(2)}_{k+\frac{1}{2}}\right)$$

$\rightsquigarrow$ Richardson-Extr.: $\boxed{y_{k+1} = 2 y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1}}$

Polygonzug / Euler: $x_k := x_0 + kh$

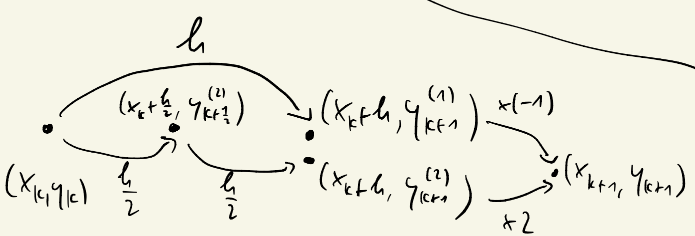
$$y_{k+1} := y_k + h\, f(x_k, y_k)$$

2.14 (2) $$y_{k+1} := y_k + h\, f\left(x_k + \frac{h}{2},\, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right) = 2 y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1}$$

„verbesserte Polygonzugmethode"

Setze
$$y^{(1)}_{k+1} := y_k + h\, f(x_k, y_k)$$
$$y^{(2)}_{k+\frac{1}{2}} := y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)$$
$$y^{(2)}_{k+1} := y^{(2)}_{k+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f\left(x_k + \frac{h}{2},\, y^{(2)}_{k+\frac{1}{2}}\right)$$

$$2 y^{(2)}_{k+1} - y^{(1)}_{k+1} = 2 y^{(2)}_{k+\frac{1}{2}} + h\, f\left(x_k + \frac{h}{2},\, y^{(2)}_{k+\frac{1}{2}}\right) - \left(y_k + h\, f(x_k, y_k)\right)$$
$$= \cancel{2} y_k + \cancel{h\, f(x_k, y_k)} + h\, f\left(x_k + \frac{h}{2},\, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right) - \cancel{y_k} - \cancel{h\, f(x_k, y_k)}$$
$$= y_k + h\, f\left(x_k + \frac{h}{2},\, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right)$$
$$= y_{k+1}$$



(5) Prädiktor-Korrektur-Modell / Methode von Heun / Trapezmethode:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big(f(x_k, y_k) + f(x_k + h, \underbrace{y_k + h\, f(x_k, y_k)}_{\text{Prädiktorwert}})\Big)$$

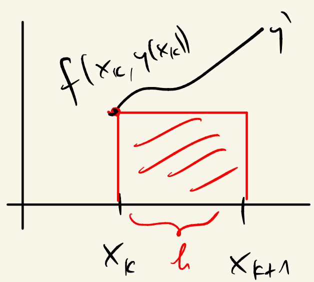
Prädiktorwert, „sagt y_{k+1} voraus"

Euler: $y_{k+1} = \text{Prädiktorwert}$

PK-Modell: $y_{k+1} = y_k + h\left[\frac{1}{2} f(x_k, y_k) + \frac{1}{2} f(x_k + h, \text{Prädiktorwert})\right]$

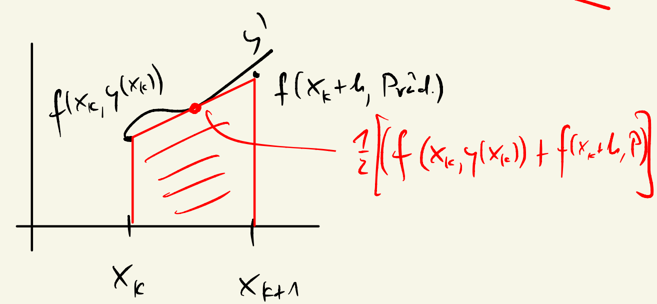
Euler Rechteck

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\,dx \approx (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k, y(x_k))$$
$$= \underline{h\, f(x_k, y(x_k))}$$



Trapez

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\,dx$$
$$\approx \underline{h\left(\frac{1}{2} f(x_k, y(x_k)) + \frac{1}{2} f(x_k + h, P)\right)}$$



§2.3 Runge-Kutta-Verfahren [≙ Bärwolff 8.1.4 – 8.1.8]

2.15 Einf.: Carl Runge, Martin Kutta, Karl Heun (≈ 1900):

- „klassisches" RK-Verfahren, „RK4" (ein spezielles, explizites 4-stufiges RK-Verf.)
- s-stufige RK-Verf.

John Butcher 1960er: Vereinfachung, Butcher-Tableaus

$$y' = f(x,y) \qquad \text{AWP} \qquad a_1, \dots a_s \in [0,1]$$
$$y(x_0) = y_0$$

Koeffizienten / Gewichte

Zwischenschritte

„Runge-Kutta-Verfahren"

$$y_{k+1} := y_k + h \sum_{j=1}^{s} c_j k_j \qquad \& \sum_{j=1}^{s} c_j = 1$$

$$k_j = f\left(x_k + h a_j,\ y_k + h \sum_{l=1}^{s} b_{jl} k_l\right), \qquad b_{jl} = 0 \text{ für } l \geq j: \text{ explizit}$$

Butcher-Tableau:
$$\begin{array}{c|cccc} a_1 & b_{11} & \cdots & & b_{1s} \\ a_2 & b_{21} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_s & b_{s1} & & & b_{ss} \\ \hline & c_1 & c_2 & \cdots & c_s \end{array}$$

explizit:
$$\begin{array}{c|cccc} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_s & b_{s1} & & b_{s,s-1} & 0 \\ \hline & c_1 & c_2 & \cdots & c_s \end{array}$$

~~73~~ 55

RK-Verf.: $y_{k+1} := y_k + h \sum_{j=1}^{s} c_j k_j$

$$k_j = f\left(x_k + h a_j,\ y_k + h \sum_{\ell=1}^{s} b_{j\ell} k_\ell\right)$$

$$\begin{array}{c|ccc} a_1 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ a_2 & b_{21} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_s & b_{s1} & & b_{ss} \\ \hline & c_1 & c_2 \cdots & c_s \end{array}$$

Bsp.: Euler/Polygon: $y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$

$s = 1$
$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Euler-Verf. ist ein 1-stufiges RK-Verf.

verb. Polygon: $y_{k+1} = y_k + h f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right) = y_k + h k_2$

$k_1 = f(x_k, y_k)$

$k_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} k_1\right)$

$s = 2$
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Prädiktor-Korrektor: $s = 2$ ...

2.16 Bsp. 3-stufiges Verf.:

$s = 3$

(1)
$$y' = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

will
$$y_{k+1} = y_k + h\left[c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3\right]$$
$$k_1 = f(x_k, y_k)$$
$$k_2 = f(x_k + a_2 h,\ y_k + h b_{21} k_1)$$
$$k_3 = f(x_k + a_3 h,\ y_k + h(b_{31} k_1 + b_{32} k_2))$$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ a_2 & b_{21} & & \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & \\ \hline & c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

(explizit)

Suche $a_2, a_3, b_{21}, b_{31}, b_{32}, c_1, c_2, c_3$ mit möglichst hoher Fehlerordnung p für schnelle Konvergenz

(2) Siehe Bärwolff 8.1.4:
$$a_2 := b_{21}$$
$$a_3 := b_{31} + b_{32}$$

- berechne Diskretisierungsfehler
- Taylorentwicklung für k_i
- Analyse der Koeffizienten, um $p \geq 3$ zu erreichen

$\rightsquigarrow$ Gleichungen für Parameter $c_1, c_2, c_3, b_{21}, b_{31}, b_{32}$ mit vielen Freiheiten

$\rightsquigarrow$ viele RK-Verfahren möglich

2.17 RK4 („das" RK-Verf.):

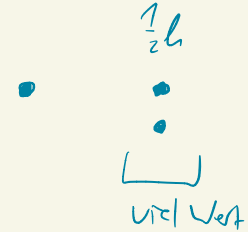
$$k_1 = f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = f\left(x_k + \tfrac{1}{2}h,\ y_k + \tfrac{1}{2}h k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_k + \tfrac{1}{2}h,\ y_k + \tfrac{1}{2}h k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_k + h,\ y_k + h k_3\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}k_1 + \frac{h}{3}k_2 + \frac{h}{3}k_3 + \frac{h}{6}k_4$$



$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

$s = 4$

2.18 Bem.: s-stufiges implizites RK-Verf. ermöglicht Fehlerordg $2s$ [8.1.5 Barwolff]

2.19 Schrittweitensteuerung: bisher $h = x_{k+1} - x_k$ fest $(x_k = x_0 + kh)$
[8.1.6 Barwolff]

$$(x_k, y_k) \xrightarrow{h_k} (x_{k+1}, y_{k+1}) \xrightarrow{h_{k+1}} (x_{k+2}, y_{k+2})$$

betrachte nun $h_k = x_{k+1} - x_k$ variabel

Bsp.: ausgehend vom Heun-Verf. (2.14(4), $s=2$)
$\rightsquigarrow$ konstruiere Verfahren mit $s=3$ mit variabler Schrittweite und steuere diese durch Vgl. der Zwischenschritte k_1, k_2, k_3 (sollen dicht beieinander sein)

2.20 Konsistenzbedingungen: (a) $\sum_{j=1}^{s} c_j = 1 \implies$ RK-Verf. konsistent (Fehlerordg $p \geq 1$)

(b) zusätzlich $a_j = \sum_{i=1}^{s} b_{ji}$, $\frac{1}{2} = \sum_{j=1}^{s} c_j a_j \implies$ RK-Verf. Fehlerordg $p \geq 2$