UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Moritz Weber
Nicolas Faroß

Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure 4a
Sommersemester 24

Klausurvorbereitungsblatt

Erinnerung: Bitte melden Sie sich rechtzeitig über das LSF für die Klausur an.

Dieses Blatt dient der Vorbereitung auf die Klausur und der Wiederholung und Vertiefung des Vorlesungsinhaltes. Das Bearbeiten der folgenden Aufgaben ist freiwillig und es findet keine Abgabe bzw. Bepunktung oder Besprechung statt. Beachten Sie: Diese Aufgabensammlung ist weder in Umfang, Schwierigkeitsgrad noch in sonst einer Weise repräsentativ für die Klausur. Insbesondere sind hier nicht alle Inhalte der Vorlesung abgedeckt und das alleinige Bearbeiten dieser Aufgaben ersetzt keine gründliche Vorbereitung auf die Klausur.

Aufgabe 1.
Die Lösung $\widetilde{x}$ der Gleichung

$$x^3 - 2x + 1 = 0, \quad x \in [0.5, 0.7]$$

soll durch eine Fixpunktiteration approximiert werden.

(a) Transformieren Sie die Gleichung durch Äquivalenzumformungen in eine Fixpunktgleichung $f(x) = x$.

(b) Beweisen Sie die Konvergenz der Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen $\widetilde{x} \in M = [0.5, 0.7]$ für alle Startwerte $x_0 \in M$, indem Sie alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes überprüfen.

(c) Berechnen Sie, wie viele Schritte $n \in \mathbb{N}$ a priori nötig sind, um ausgehend vom Startwert $x_0 = 0.5$ einen Fehler $|x_n - \widetilde{x}| < 10^{-8}$ zu garantieren.

Aufgabe 2.

(a) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Lösung der Gleichung $e^{ax} = b$, wobei $a > 0$ und $b > 0$ gilt.

(b) Berechnen Sie die ersten vier Iterationsschritte zur Approximation von $\frac{1}{3}\ln(2)$ ausgehend vom Startwert $x_0 = 3$. Zeigen Sie, dass das Verfahren gegen $\frac{1}{3}\ln(2)$ konvergiert und vergleichen Sie den Wert x_4 mit dem exakten Wert von $\frac{1}{3}\ln(2)$.

Aufgabe 3.
Es seien die 3×3 Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie für jede Matrix A_i $(i = 1, 2, 3)$ die Normen

- (a) $\|A_i\|_1$
- (b) $\|A_i\|_2$
- (c) $\|A_i\|_\infty$
- (d) $\|A_i\|_F$

(b) Welche der Matrizen sind strikt/schwach diagonal dominant?

Aufgabe 4.
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass A strikt diagonal dominant ist und bestimmen Sie die Zerlegung $A = D + L + U$ wie in der Vorlesung.

(b) Führen Sie drei Schritte des Jacobi-Verfahrens für das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Startwert x_0 durch.

(c) Führen Sie drei Schritte des Gauß-Seidel-Verfahrens für das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Startwert x_0 durch.

(d) Überprüfen Sie, dass $\overline{x} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ das Gleichungssystem exakt löst. Bestimmen und vergleichen Sie die Abstände $\|x_i - \overline{x}\|_\infty$ für die mit dem Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren berechneten Werte und $i = 1, 2, 3$. Welches Verfahren liefert eine bessere Approximation?

Aufgabe 5.
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 2y(x) - x, \quad y(0) = 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $y(x) = \frac{1}{4} \cdot (2x + 3e^{2x} + 1)$ das Anfangswertproblem löst.

(b) Berechnen Sie vier Schritte des Eulerverfahrens zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 1)$ und zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

(c) Berechnen Sie vier Schritte der verbesserten Polygonzugmethode zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 1)$ und zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

(d) Berechnen Sie vier Schritte der Trapezmethode zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 1)$ und zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

(e) Vergleichen Sie die vorherigen Ergebnisse mit der exakten Lösung $y(x)$ an den Stellen $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

Aufgabe 6.
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x) - x + 1, \quad y(0) = 1.$$

(a) Das Verfahrens von Ralston dritter Ordnung und das SSPRK3 Verfahren sind die Runge-Kutta-Verfahren mit folgenden Butcher-Tableaus:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 3/4 & 0 & 3/4 & \\ \hline & 2/9 & 1/3 & 4/9 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & \\ \hline & 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{array}$$

(a) Berechnen Sie zwei Schritte des Verfahrens von Ralston dritter Ordnung zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 1)$ und zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

(b) Berechnen Sie zwei Schritte des SSPRK3 Verfahrens zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 1)$ und zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$.

(b) Bestimmen Sie die exakte Lösung für das Anfangswertproblem und vergleichen Sie die Ergebnisse aus Teil (b) mit der exakten Lösung $y(x)$ an den Stellen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$.

Aufgabe 7.
Gegeben sei das implizite Zweischrittverfahren

$$y_{j+2} + 3y_{j+1} - 4y_j = h \cdot \big(2f(x_{j+2}, y_{j+2}) + f(x_{j+1}, y_{j+1}) + 2f(x_j, y_j)\big) \qquad (*)$$

und das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{2}y - 1, \quad y(0) = 1.$$

Zu der Schrittweite $h = \frac{1}{3}$ soll eine Näherung $y_3 \in \mathbb{R}$ zum exakten Wert $y(1)$ bestimmt werden.

(a) Benutzen Sie das explizite Euler-Verfahren, um $y_1 \in \mathbb{R}$ zu berechnen und dann das Verfahren aus $(*)$, um die Näherung $y_2 \in \mathbb{R}$ und $y_3 \in \mathbb{R}$ zu berechnen.

(b) Ist das Verfahren aus $(*)$ nullstabil?