UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Moritz Weber
Nicolas Faroß

Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure 4a
Sommersemester 2024

Sechstes Übungsblatt
Abgabe Dienstag, 02.07.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**
Betrachte ein allgemeines Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0 \quad (x, x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}).$$

Für eine Schrittweite $h > 0$ setze $x_k := x_0 + k \cdot h$ ($k \in \mathbb{N}_0$). Für $k \geq 3$ betrachten wir zu den Startwerten $y_0, y_1, \ldots, y_k$ das Interploationspolynom

$$p_3(x) = \sum_{j=0}^{3} f(x_{k-j}, y_{k-j}) \cdot L_{k-j}(x) \qquad \text{mit} \qquad L_{k-j}(x) = \prod_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k-j}}^{k} \frac{x - x_i}{x_{k-j} - x_i} \quad (x \in I)$$

und wählen den Ansatz

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_3(x)\, dx.$$

Bestimmen Sie die fehlenden Koeffizienten aus dem Adams-Bashfort Verfahren, indem Sie folgende Integrale in Abhängigkeit von $x_0 \in I$, $h > 0$ und $k \geq 3$ lösen:

(a) $I_0 = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_k(x)\, dx$

(b) $I_1 = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-1}(x)\, dx$

(c) $I_2 = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-2}(x)\, dx$

(d) $I_3 = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-3}(x)\, dx$

Hinweis: Schreiben Sie $x - x_{k-j} = x - x_k + jh$, sowie $x_{k-j} - x_{k-l} = (l-j)h$ und substituieren Sie $\xi = \frac{x - x_k}{h}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**
Gegeben sei das Zweischrittverfahren

$$y_{j+2} - \frac{1}{2} y_{j+1} - \frac{1}{2} y_j = \frac{h}{4}\big(7 f(x_{j+1}, y_{j+1}) - f(x_j, y_j)\big) \qquad (*)$$

und das Anfangswertproblem

$$y' = -y, \quad y(0) = 1.$$

Zu der Schrittweite $h = 1/2$ soll eine Näherung $y_3 \in \mathbb{R}$ zum exakten Wert $y(3/2)$ bestimmt werden. Benutzen Sie das explizite Euler-Verfahren, um $y_1 \in \mathbb{R}$ zu berechnen und dann das Verfahren aus $(*)$, um die Näherung $y_2 \in \mathbb{R}$ und $y_3 \in \mathbb{R}$ zu berechnen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**
Gegeben sei das implizite Zweischrittverfahren

$$y_{j+2} - \frac{4}{3}y_{j+1} + \frac{1}{3}y_j = \frac{2h}{3}\big(f(x_{j+2}, y_{j+2})\big) \qquad (*)$$

und das Anfangswertproblem

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Zu der Schrittweite $h = 1/3$ soll eine Näherung $y_3 \in \mathbb{R}$ zum exakten Wert $y(1)$ bestimmt werden. Benutzen Sie das implizite Euler-Verfahren

$$y_{j+1} - y_j = hf(x_{j+1}, y_{j+1}),$$

um $y_1 \in \mathbb{R}$ zu berechnen und dann das Verfahren aus $(*)$, um die Näherung $y_2 \in \mathbb{R}$ und $y_3 \in \mathbb{R}$ zu berechnen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**
Hinweis: Der Begriff nullstabil wird erst in der Vorlesung am 25.06. eingeführt.

Bestimmen Sie für das lineare Mehrschrittverfahren

$$y_{j+3} + \gamma(y_{j+2} - y_{j+1}) - y_j = h \cdot \frac{3+\gamma}{2}\big(f(x_{j+2}, y_{j+2}) + f(x_{j+1}, y_{j+1})\big)$$

und hinreichend oft differenzierbarem f die von $\gamma \in \mathbb{R}$ abhängige Konsistenzordnung p. Für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ ist das Verfahren nullstabil?