**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**Fakultät für Mathematik und Informatik**
**Fachrichtung Mathematik**
Prof. Dr. Moritz Weber
Nicolas Faroß

**Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure 4a**
Sommersemester 2024

**Fünftes Übungsblatt**
Abgabe Dienstag, 18.06.

---

**Aufgabe 1** (10 Punkte).
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Trapezmethode ein Runge-Kutta-Verfahren ist und bestimmen Sie das dazugehörige Butcher-Tableau.

(b) Das Verfahren von Ralston zweiter Ordnung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 + k \cdot h, \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{4} h f(x_k, y_k) + \frac{3}{4} h f\left(x_k + \frac{2}{3} h, y_k + \frac{2}{3} h f(x_k, y_k)\right). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das Verfahren ein Runge-Kutta-Verfahren ist und bestimmen Sie das dazugehörige Butcher-Tableau.

(c) Das Verfahren von Ralston dritter Ordnung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 + k \cdot h, \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{2}{9} h f(x_k, y_k) + \frac{1}{3} h f\left(x_k + \frac{1}{2} h, y_k + \frac{1}{2} h f(x_k, y_k)\right) \\ &\quad + \frac{4}{9} h f\left(x_k + \frac{3}{4} h, y_k + \frac{3}{4} h f\left(x_k + \frac{1}{2} h, y_k + \frac{1}{2} h f(x_k, y_k)\right)\right). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das Verfahren ein Runge-Kutta-Verfahren ist und bestimmen Sie das dazugehörige Butcher-Tableau.

**Aufgabe 2** (10 Punkte).
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - y(x)), \quad y(0) = 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $y(x) = 3 \cdot e^{-x/2} + x - 2$ das Anfangswertproblem löst.

(b) Berechnen Sie vier Schritte des Eulerverfahrens zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 1)$ und zur Schrittweite $h = 1$.

(c) Berechnen Sie vier Schritte der verbesserten Polygonzugmethode zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 1)$ und zur Schrittweite $h = 1$.

(d) Berechnen Sie vier Schritte der Trapezmethode zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 1)$ und zur Schrittweite $h = 1$.

(e) Vergleichen Sie die vorherigen Ergebnisse mit der exakten Lösung $y(x)$ an den Stellen $x = 1, 2, 3, 4$.

**Aufgabe 3** (10 Punkte)**.**
*Hinweis:* Es wurde ein Fehler in der zweiten Tabelle in Teil (b) korrigiert. Es gibt keinen Punkteabzug, falls Sie die Aufgabe mit der ursprünglichen Tabelle gelöst haben.

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x) + x, \quad y(0) = 2.$$

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung für das Anfangswertproblem.

(b) Das Verfahrens von Heun dritter Ordnung und das Verfahrens von Kutta dritter Ordnung sind die Runge-Kutta-Verfahren mit folgenden Butcher-Tableaus:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

(i) Berechnen Sie zwei Schritte des Verfahren von Heun dritter Ordnung zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 2)$ und zur Schrittweite $h = 1$.

(ii) Berechnen Sie zwei Schritte des Verfahren von Kutta dritter Ordnung zum Startwert $(x_0, y_0) = (0, 2)$ und zur Schrittweite $h = 1$.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus Teil (b) mit der exakten Lösung $y(x)$ an den Stelle $x = 1, 2$.

**Aufgabe 4** (10 Punkte)**.**
*Hinweis:* Für die Aufgabe relevanten Begriffe werden erst in der Vorlesung am 11.06. eingeführt.

Wir betrachten ein Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

und für $c_1, c_2, a, b \in \mathbb{R}$ ein zweistufiges Einschrittverfahren

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot (c_1 \cdot k_1(x_n, y_n) + c_2 \cdot k_2(x_n, y_n)) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1(x, y) &= f(x, y) \\ k_2(x, y) &= f(x + a \cdot h,\ y + h \cdot b \cdot k_1(x, y)) \end{aligned}$$

Geben Sie Bedingungen für die Parameter $c_1, c_2, a, b \in \mathbb{R}$ an, sodass das zweistufige Einschrittverfahren Konsistenzordnung $p = 2$ hat.