UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Moritz Weber
Nicolas Faroß

Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure 4a
Sommersemester 2024

Viertes Übungsblatt
Abgabe Dienstag, 04.06.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass A strikt diagonal dominant ist und bestimmen Sie die Zerlegung $A = D + L + U$ wie in der Vorlesung.

(b) Führen Sie drei Schritte des Jacobi-Verfahrens für das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Startwert x_0 durch.

(c) Führen Sie drei Schritte des Gauß-Seidel-Verfahrens für das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Startwert x_0 durch.

(d) Überprüfen Sie, dass $\overline{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ das Gleichungssystem exakt löst. Bestimmen und vergleichen Sie die Abstände $\|x_i - \overline{x}\|_\infty$ für die mit dem Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren berechneten Werte und $i = 1, 2, 3$. Welches Verfahren liefert eine bessere Approximation?

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**
Betrachten Sie das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$ mit $y(x_0) = y_0$, wobei

$$f(x, y) = 3x^3 - x^2 + 9x^2 - 2x - y, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 0.$$

(a) Führen Sie 4 Schritte des Euler-Verfahrens mit Schrittweiten $h = \frac{1}{4}$ und Startwerten x_0 und y_0 durch.

(b) Führen Sie 8 Schritte des Euler-Verfahrens mit Schrittweiten $h = \frac{1}{8}$ und Startwerten x_0 und y_0 durch.

(c) Überprüfen Sie, dass $y = 3x^3 - x^2$ das Anfangswertproblem löst und vergleichen Sie die in Teil (a) und (b) berechneten Endwerte mit dem tatsächlichen Wert $y(1)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t - t^3, \quad y(0) = 0.$$

Zur Schrittweite h sollen mit dem expliziten Euler-Verfahren Näherungswerte y_j für $y(t_j)$ und $t_j = j \cdot h$ berechnet werden.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Näherung y_j wie folgt darstellen lässt:

$$y_j = y_0 + \frac{h^2}{4}(j-1)j(2 - h^2(j-1)j).$$

(b) Geben Sie die exakte Lösung $y(t)$ an und zeigen Sie, dass an jeder Stelle t der Fehler für $h = t/j \to 0$ gegen Null konvergiert.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{|y|} \text{ für } x \geq 0 \quad \text{und} \quad y(0) = a.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$y\colon \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \left(\frac{x}{2} + \sqrt{a}\right)^2 \quad (a \geq 0)$$

das Anfangswertproblem löst.

(b) Welche Näherungslösung y_j liefert das explizite Euler-Verfahren für $a = 0$ und feste Schrittweite $h > 0$? Erklären Sie das Ergebnis.