Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik

Analysis III

Skript

Wintersemester 2024/25

(Version vom 25. März 2025)

Prof. Dr. Roland Speicher

mit der Unterstützung von
Dr. Johannes Hoffmann

Basierend auf einer LaTeX-Vorlesungsmitschrift von
Friedrich Günther

Inhaltsverzeichnis

Teil I.
Maß- und Integrationstheorie

Das Riemann-Integral (oder das Integral von Regelfunktionen) ist eine gute Theorie für stetige Funktionen und verträgt sich gut mit der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen, passt aber nicht zur punktweisen Konvergenz. Zur Behandlung von allgemeineren Funktionen wird also ein allgemeinerer Integralbegriff als das Riemann-Integral gebraucht.

Das wesentliche Ziel der Integrationstheorie ist die Definition des Ausdrucks $\int f$ für eine hinreichend große Klasse von Funktionen, so dass für punktweise Konvergenz unter möglichst allgemeinen Bedingungen gilt:

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n .$$

Die Tatsache, dass obige Einschränkungen ("hinreichend große Klasse", "möglichst allgemein") notwendig sind – man also nicht alle Funktionen integrieren kann und obige Gleichung auch nicht für alle integrierbaren Funktionen gilt – zeigt die hochgradig nichttriviale Natur dieses Unterfangens.

Ein möglicher Zugang dazu ist das Daniell-Integral. Dort betrachtet man die Abbildung $f \mapsto \int f$ abstrakt als ein positives lineares Funktional von $\mathcal{C}(X)$ nach $\mathbb{C}$ und dehnt dies direkt (als solche lineare Abbildung) auf eine möglichst große Klasse von Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ aus. Wir werden uns stattdessen aber vornehmlich mit dem Lebesgue-Integral beschäftigen. Beide Zugänge zu einem allgemeineren Integral liefern im Endeffekt äquivalente Theorien; wir werden auf die Verknüpfung dieser beiden Gesichtspunkte später beim Rieszschen Darstellungssatz eingehen.

Beim Zugang von Lebesgue geht man zur Definition des Integrals zurück und reduziert letztendlich alles auf Integrale über charakteristische Funktionen. Für $A = [a, b]$ ist das Integral

$$\int 1_A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b - a$$

ein "Maß" für die Größe von A.[1] Statt der Länge von A werden wir auch allgemeinere "Maße" μ zulassen und dann aus der Kenntnis von $\mu(A) = \int 1_A\,\mathrm{d}\mu$ für möglichst viele Mengen A die Integrale $\int f\,\mathrm{d}\mu$ bezüglich des Maßes μ für möglichst viele Funktionen f bestimmen.

Ein wesentlicher Teil der Theorie in diesem Lebesgueschen Zugang zur Integrationstheorie wird somit darin bestehen, Maße allgemein zu verstehen und insbesondere auch zu konstruieren.

[1] Sei A eine Teilmenge einer Menge X. Die *charakteristische Funktion* von A in X ist

$$1_A : X \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

1. Abstrakte Integration aus gegebenem Maß

1.1. σ-Algebren und Maße

Ein “Maß” λ soll die Größe von Mengen messen, so dass es sich sinnvoll verhält bezüglich den kanonischen Operationen und Approximationen. Für ein Intervall $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist beispielsweise $\lambda(I) = b - a$ die Länge des Intervalls, aber wir brauchen λ auch für Mengen, die aus Intervallen durch kanonische Operationen konstruiert werden können. Typischerweise kann man Maße nicht auf allen Mengen definieren. Der Definitionsbereich von Maßen heißt σ-Algebra.

Definition 1.1. Sei X eine Menge.

(1) Eine *σ-Algebra* $\mathfrak{A}$ auf X ist eine Teilmenge von $\operatorname{Pot}(X) := \{A \mid A \subseteq X\}$ mit folgenden Eigenschaften:

  (i) $X \in \mathfrak{A}$.

  (ii) Ist $A \in \mathfrak{A}$, so gilt auch $A^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{A}$.[2]

  (iii) Ist $A_n \in \mathfrak{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.[3]

(2) Ein (positives) *Maß* auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist eine Funktion $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

  (i) Es gilt $\mu(\emptyset) = 0$.

  (ii) μ ist *σ-additiv*: Sind $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt[4], so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$[5]

(3) Ein *messbarer Raum* ist ein Paar $(X, \mathfrak{A})$ bestehend aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ auf X. Die Elemente von $\mathfrak{A}$ heißen *messbare Mengen*.

(4) Ein *Maßraum* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ hat zusätzlich ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$.

Bemerkung 1.2. (0) Im Englischen nennt man $\mathfrak{A}$ “σ-algebra” oder “σ-field”, μ “measure”, $(X, \mathfrak{A})$ “measurable space” und $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ “measure space”.

(1) Wesentlich ist, dass in der Definition von σ-Algebra und Maß abzählbare Vereinigungen erlaubt sind. Hierbei steht “σ” für “abzählbar”.

(2) Der Ausdruck $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \in [0, \infty]$ ist immer definiert, da alle Terme nicht-negativ sind.

(3) Es ist sinnvoll auch $\mu(A) = \infty$ für gewisse A zuzulassen: Zum Beispiel ist die Länge des Intervalls $[a, \infty)$ unendlich.

(4) Triviale Beispiele für σ-Algebren sind $\mathfrak{A} = \{\emptyset, X\}$ und $\mathfrak{A} = \operatorname{Pot}(X)$.

---

[2] Hierbei bezeichnet $A^{\mathsf{c}} := \{x \in X \mid x \notin A\}$ das Komplement von A in X. Zusammen mit der ersten Eigenschaft folgt daraus, dass jede σ-Algebra die leere Menge $\emptyset = X^{\mathsf{c}}$ enthält.

[3] Mit den Regeln von de Morgan folgt auch die Abgeschlossenheit unter abzählbaren Durchschnitten.

[4] Eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Mengen ist *paarweise disjunkt*, falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt.

[5] Insbesondere folgt daraus $\mu(A) \leq \mu(B)$ im Fall $A \subseteq B$.

(5) Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann definieren wir

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{A}\ \sigma-\text{Algebra} \\ \mathcal{F} \subseteq \mathfrak{A}}} \mathfrak{A}$$

und nennen $\sigma(\mathcal{F})$ die von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra. Insbesondere ist $\sigma(\mathcal{F})$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ enthält.

Für $\mathcal{F} = \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ ist die *Borel-σ-Algebra* $\mathfrak{B} := \sigma(\mathcal{F})$ die kleinste σ-Algebra, die alle Intervalle enthält. Ihre Elemente heißen *Borelmengen*.

(6) Nichttriviale σ-Algebren sind normalerweise recht abstrakte Objekte, zum Beispiel gibt es keine explizite Beschreibung einer allgemeinen Borelmenge $A \in \mathfrak{B}$.

(7) Im Augenblick wissen wir noch nicht, wie wir nicht-triviale Maße konstruieren können; zum Beispiel ist es nicht klar, wie wir λ (als Funktion, die reellen Intervallen ihre Länge zuordnet) zu beliebigen Borelmengen fortsetzen können. Im Augenblick nehmen wir ein Maß als gegeben an. Im nächsten Kapitel kommen wir auf das Problem der Konstruktion eines Maßes zurück.

(8) Die σ-Additivität eines Maßes entspricht einer Stetigkeitseigenschaft, wie wir im Folgenden sehen werden.

Notation 1.3. Seien $A_n \subseteq X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq X$. Dann schreiben wir $A_n \nearrow A$, falls

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \quad \text{und} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

beziehungsweise $A_n \searrow A$, falls

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \quad \text{und} \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Satz 1.4. Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und betrachte $A, A_n \in \mathfrak{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(1) Aus $A_n \nearrow A$ folgt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(2) Gilt $A_n \searrow A$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Beweis. Übung. □

1.2. Messbare Funktionen

Definition 1.5. Seien $(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{M})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *messbar*, falls $f^{-1}(M) \in \mathfrak{A}$ für alle $M \in \mathfrak{M}$.[6]

Satz 1.6. Sei $\mathfrak{M} = \sigma(\mathcal{F})$ für $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Pot}(Y)$. Dann ist $f : X \to Y$ genau dann messbar, falls $f^{-1}(F) \in \mathfrak{A}$ für alle $F \in \mathcal{F}$.

Beweis. Wenn f messbar ist, gilt $f^{-1}(F) \in \mathfrak{A}$ für alle $F \in \mathfrak{M} = \sigma(\mathcal{F})$, also sicherlich auch für alle $F \in \mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$.

Andererseits gelte $f^{-1}(F) \in \mathfrak{A}$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Setze

$$\mathfrak{N} := \left\{ N \subseteq Y \mid f^{-1}(N) \in \mathfrak{A} \right\}.$$

Dann gilt $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Es reicht zu zeigen, dass $\mathfrak{N}$ eine σ-Algebra ist, denn dann folgt direkt $\mathfrak{N} \supseteq \sigma(\mathcal{F}) = \mathfrak{M}$ (weil $\sigma(\mathcal{F})$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{F}$ enthält) und somit gilt $f^{-1}(M) \in \mathfrak{A}$ für alle $M \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$; also ist f messbar.

Um zu zeigen, dass $\mathfrak{N}$ eine σ-Algebra ist, überprüfen wir die Axiome:

(i) Aus $Y \subseteq Y$ und $f^{-1}(Y) = X \in \mathfrak{A}$ folgt $Y \in \mathfrak{N}$.

(ii) Sei $N \in \mathfrak{N}$, dann gilt $f^{-1}(N) \in \mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ ein σ-Algebra ist, folgt $N^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{N}$ aus

$$f^{-1}(N^{\mathsf{c}}) = \{x \in X \mid f(x) \notin N\} = \left(f^{-1}(N)\right)^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{A}.$$

(iii) Sei $N_n \in \mathfrak{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $f^{-1}(N_n) \in \mathfrak{A}$ für alle n. Da $\mathfrak{A}$ ein σ-Algebra ist, folgt mit den Eigenschaften des Urbilds $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \in \mathfrak{N}$ aus

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(N_n) \in \mathfrak{A}. \qquad \square$$

Oft (insbesondere für $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) sind die betrachteten σ-Algebren durch eine Topologie gegeben.

Definition 1.7. Sei X eine Menge.

(1) Eine *Topologie* τ auf X ist eine Teilmenge $\tau \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $\emptyset \in \tau$ und $X \in \tau$.
   (b) Sind $U_1, \dots, U_n \in \tau$, so gilt auch $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.
   (c) Ist $U_i \in \tau$ für alle $i \in I$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist, so gilt auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

   Die Mengen in τ heißen *offene Mengen*,[7] das Tupel (X, τ) heißt *topologischer Raum*.

(2) Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen (X, τ_X) und (Y, τ_Y) heißt *stetig*, falls $f^{-1}(U) \in \tau_X$ für alle $U \in \tau_Y$.

(3) Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Die von τ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\tau)$ heißt die σ-Algebra der *Borelmengen* in X.

[6] Hierbei ist $f^{-1}(M) := \{x \in X \mid f(x) \in M\}$ das *Urbild* von M.

[7] Wie in metrischen Räumen sind endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen offener Mengen also wieder offen. Insbesondere bilden die offenen Mengen eines metrischen Raumes eine Topologie.

Konvention 1.8. Im Folgenden betrachten wir $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n\}$ immer als messbaren Raum mit der Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B} = \sigma(\tau)$ bezüglich der kanonischen Topologie τ auf Y.[8]

Korollar 1.9. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann ist jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ messbar.

Beweis. Die Topologie auf $\mathbb{R}$ ist die σ-Algebra $\mathfrak{B}$, die von den offenen Mengen in $\mathbb{R}$ erzeugt wird. Sei also $V \subseteq \mathbb{R}$ offen. Da f stetig ist, ist auch $f^{-1}(V)$ offen, also gilt $f^{-1}(V) \in \tau \subseteq \sigma(\tau)$. Laut Satz 1.6 ist f somit messbar. $\square$

Satz 1.10. Sei τ die kanonische Topologie auf $\mathbb{R}$.

(1) Jede offene Menge in $\mathbb{R}$ ist eine abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen.

(2) Es gilt

$$\mathfrak{B} := \sigma(\tau) = \underbrace{\sigma\big(\{(a,b) \mid a < b\}\big)}_{=:\sigma_1} = \underbrace{\sigma\big(\{(\alpha,\infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}\big)}_{=:\sigma_2} = \underbrace{\sigma\big(\{[\alpha,\infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}\big)}_{=:\sigma_3}.$$

Beweis. (1) Sei $V \subseteq \mathbb{R}$ offen und $x_1, x_2, \ldots$ die (abzählbar vielen) rationalen Punkte in V. Da V offen ist, gibt es zu jedem $x_i \in V$ ein maximales offenes Intervall U_i mit $x_i \in U_i \subseteq U$. Dann gilt $V = \bigcup_i U_i$, denn für beliebiges $x \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$. Dann existiert aber auch ein $x_i \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Da U_i maximal gewählt wurde, folgt $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_i$. Folglich ist V die abzählbare Vereinigung der U_i.

(2) Laut dem vorherigen Teil wird $\mathfrak{B}$ als σ-Algebra erzeugt von den drei Familien

$$\{(a,b) \mid a < b\}, \quad \{(\alpha,\infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad \{(-\infty,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

von offenen Intervallen. Wegen $(-\infty, \alpha) = [\alpha, \infty)^{\mathsf{c}}$ reicht es also die Gleichheit $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ zu zeigen:

(i) Es gilt $\sigma_3 \subseteq \sigma_1$ wegen

$$[\alpha,\infty) = (-\infty,\alpha)^{\mathsf{c}} = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n,\alpha)\right)^{\mathsf{c}} \quad \text{für alle} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(ii) Es gilt $\sigma_2 \subseteq \sigma_3$ wegen

$$(\alpha,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\alpha + \frac{1}{n}, \infty\right) \quad \text{für alle} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(iii) Es gilt $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ wegen

$$(a,b) = (a,\infty) \cap (-\infty,b) = (a,\infty) \cap [b,\infty)^{\mathsf{c}} = (a,\infty) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(b - \frac{1}{n}, \infty\right)\right)^{\mathsf{c}}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. $\square$

[8] Da auf Y alle Normen äquivalent sind, erhält man unabhängig von der Wahl der Norm immer die gleiche induzierte Topologie.

Korollar 1.11. Sei $(X,\mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $f: X \to \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist messbar.

(2) $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha,\infty)) \in \mathfrak{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha,\infty)) \in \mathfrak{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\} = f^{-1}((-\infty,\alpha)) \in \mathfrak{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. Folgt aus Satz 1.6 und Satz 1.10. □

Satz 1.12. Seien $f,g: X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind auch $f+g$ und $f \cdot g$ messbar.

Beweis. Die Messbarkeitsbedingung $f(x)+g(x) < \alpha$ führt auf $f(x) < \alpha - g(x)$, das heißt es existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) < r < \alpha - g(x)$. Somit ist

$$\{x \in X \mid f(x)+g(x) < \alpha\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \underbrace{\{x \in X \mid f(x) < r\}}_{\in\mathfrak{A}} \cap \underbrace{\{x \in X \mid g(x) < \alpha - r\}}_{\in\mathfrak{A}},$$

also gilt $\{x \in X \mid f(x)+g(x) < \alpha\} \in \mathfrak{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, damit ist $f+g$ messbar. Der Beweis für das Produkt $f \cdot g$ funktioniert analog. □

Konvention 1.13. Für reellwertige Funktionen wollen wir auch $\pm\infty$ als Funktionswerte zulassen, das heißt wir betrachten $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty,\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ und versehen $\overline{\mathbb{R}}$ mit einer σ-Algebra

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \sigma(\{[\alpha,\infty] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{(\alpha,\infty] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}).$$

Somit ist $f: (X,\mathfrak{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann messbar, wenn $\{x \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Die topologischen Begriffe (Grenzwerte, sup, inf) sind auf $\overline{\mathbb{R}}$ in offensichtlicher Weise definiert mit der Konvention $-\infty \leq x \leq \infty$ für alle $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Satz 1.14. Seien $f_n: X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von messbaren Funktionen. Dann sind auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ als Funktionen $X \to \overline{\mathbb{R}}$ alle messbar. Insbesondere gilt: Für eine punktweise konvergente Folge von messbaren Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch der Grenzwert $f = \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar.

Beweis. Zuerst wollen wir den Nachweis bringen, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar ist. Sei dazu $\alpha \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\left\{x \;\middle|\; \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > \alpha\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \mid f_n(x) > \alpha\}}_{\in\mathfrak{A}},$$

also ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar. Der Nachweis für $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ funktioniert analog. Weiter gilt $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k$, damit ist auch $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar. Der Nachweis für $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ funktioniert analog. □

Notation 1.15. Sei A eine Teilmenge einer Menge X. Die *charakteristische Funktion* 1_A (oder auch χ_A) von A in X ist

$$1_A : X \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Die charakteristische Funktion 1_A einer Menge A ist genau dann messbar, wenn A messbar ist.

Definition 1.16. Eine Funktion $s : X \to \mathbb{R}$ heißt *einfach* (oder auch *Elementarfunktion*), falls sie messbar ist und ihr Wertebereich nur aus endlich vielen Punkten besteht, das heißt

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte messbare $A_1, \dots, A_n \subseteq X$.

Summen, Differenzen und Produkte von einfachen Funktionen sind jeweils wieder einfache Funktionen.

Satz 1.17. Sei $f : X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Dann gibt es einfache Funktionen $s_n : X \to \mathbb{R}$ mit

(a) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$ und

(b) $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Ist $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so definieren wir

$$E_{n,k} := f^{-1}\big([k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}]\big) \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n - 1$$

und

$$E_{n,n\cdot 2^n} := f^{-1}\big([n, \infty)\big) \quad \text{für} \quad k = n \cdot 2^n.$$

Die Funktionen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n} \frac{k}{2^n} 1_{E_{n,k}}$$

erfüllen dann die Anforderungen. □

1.3. Integral für positive Funktionen

Bemerkung 1.18. (1) Die Strategie zur Definition des Integrals:

(i) Für charakteristische Funktionen 1_A erklären wir das Integral von 1_A durch $\int 1_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$.

(ii) Für einfache Funktionen erklären wir das Integral durch

$$\int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int 1_{A_i} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

(iii) Für messbare Funktionen wollen wir einen Integralbegriff definieren, der

$$\int \lim_{n\to\infty} s_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n \,\mathrm{d}\mu$$

leistet.

Im Schritt von charakteristischen Funktionen zu einfachen Funktionen müssen wir uns überlegen, dass aus

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j 1_{B_j} = s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i 1_{A_i} \quad \text{schon} \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i)$$

folgt. Das ist einfach zu sehen.

Im Schritt von einfachen Funktionen zu messbaren Funktionen müssen wir sicherstellen, dass aus

$$\lim_{n\to\infty} s_n = f = \lim_{n\to\infty} t_n \quad \text{schon} \quad \lim_{n\to\infty} \int s_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int t_n \,\mathrm{d}\mu$$

folgt. Das ist nicht offensichtlich, daher definieren wir das Integral etwas anders und betrachten Konvergenzeigenschaften später.

(2) Um Problemen mit $\infty - \infty$ aus dem Weg zu gehen, betrachten wir zunächst $f \geq 0$, später betrachten wir dann den allgemeinen Fall.

Konvention. Im Folgenden sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 1.19 (Lebesgue-Integral). (1) Sei $s : X \to [0, \infty)$ eine einfache Funktion, etwa $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ für $A_i \in \mathfrak{A}$ und $\alpha_i \in [0, \infty)$ für alle i, sowie $E \in \mathfrak{A}$, dann definieren wir

$$\int_E s \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_E 1_{A_i} \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) \in [0, \infty],$$

wobei wir die Konvention $0 \cdot \infty = 0$ verwenden.

(2) Für eine messbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ und $E \in \mathfrak{A}$ definieren wir das *Lebesgue-Integral* von f über E durch

$$\int_E f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{s \text{ einfach} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_E s \,\mathrm{d}\mu \in [0, \infty].$$

Bemerkung 1.20. (1) Für einfache $s : X \to [0, \infty)$ stimmen die beiden Definitionen aus Definition 1.19 überein. Falls s nämlich einfach ist, ist

$$\int_E s \,\mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{\tilde{s} \text{ einfach} \\ 0 \leq \tilde{s} \leq s}} \int_E \tilde{s} \,\mathrm{d}\mu.$$

Dies sieht man folgendermaßen: Da s eine gültige Wahl für $\tilde{s}$ ist, gilt

$$\int_E s \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{\substack{\tilde{s} \text{ einfach} \\ 0 \leq \tilde{s} \leq s}} \int_E \tilde{s} \,\mathrm{d}\mu.$$

Ist andererseits $\tilde{s} \leq s$, so gilt $\int_E \tilde{s} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E s \,\mathrm{d}\mu$: Da $\tilde{s}$ und s einfach sind und $\tilde{s} \leq s$ gilt, können wir schreiben

$$\tilde{s} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} \quad \text{sowie} \quad s = \sum_{i=1}^{n} \beta_i 1_{A_i}$$

für $A_i \in \mathfrak{A}$ paarweise disjunkt und $0 \leq \alpha_i \leq \beta_i < \infty$ für alle i; damit gilt

$$\int_E \tilde{s} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu(A_i \cap E) = \int_E s \,\mathrm{d}\mu.$$

(2) Auch für $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ mit $A_i \in \mathfrak{A}$ paarweise disjunkt und $0 \le \alpha_i \le \infty$ für alle i gilt

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E),$$

wobei $\infty \cdot 0 = 0$.

Satz 1.21. Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar und $A, B, E \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

(i) Aus $f \le g$ folgt $\int_E f \, \mathrm{d}\mu \le \int_E g \, \mathrm{d}\mu$.

(ii) Aus $A \subseteq B$ folgt $\int_A f \, \mathrm{d}\mu \le \int_B f \, \mathrm{d}\mu$.

(iii) Für alle Konstanten $c \in [0, \infty]$ gilt $\int_E cf \, \mathrm{d}\mu = c \int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

(iv) Aus $f(x) = 0$ für alle $x \in E$ folgt $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$ (auch falls $\mu(E) = \infty$).

(v) Aus $\mu(E) = 0$ folgt $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$ (auch falls $f(x) = \infty$ für alle $x \in E$).

(vi) Es ist $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_X 1_E f \, \mathrm{d}\mu$.

Beweis. Alle Aussagen sind direkte Folgerungen aus der Definition. Exemplarisch wollen wir einige Aussagen zeigen, die restlichen seien zur Übung überlassen.

(i) Jedes einfache s mit $0 \le s \le f$ erfüllt auch $0 \le s \le g$.

(ii) Zunächst sei $f = s$ einfach, also $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$. Für das Integral von s gilt

$$\int_A s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A \cap A_i) \le \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(B \cap A_i) = \int_B s \, \mathrm{d}\mu$$

wegen $A \cap A_i \subseteq B \cap A_i$ und der Monotonieeigenschaft des Maßes. Sei f nun messbar. Für das Integral gilt dann

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{s \text{ einfach} \\ 0 \le s \le f}} \int_A s \, \mathrm{d}\mu \le \sup_{\substack{s \text{ einfach} \\ 0 \le s \le f}} \int_B s \, \mathrm{d}\mu = \int_B f \, \mathrm{d}\mu$$

wegen der Abschätzung $\int_A s \, \mathrm{d}\mu \le \int_B s \, \mathrm{d}\mu$ für alle einfachen s.

(iv) Sei $f \equiv 0$ auf E. Dann erfüllt jedes einfache s mit $0 \le s \le f$ schon $s \equiv 0$ auf E, das heißt für solches s gilt

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) = 0,$$

da entweder $A_i \cap E = \emptyset$ oder $A_i \cap E \neq \emptyset$, aber deshalb schon $\alpha_i = 0$ da $s(x) = 0$ für alle $x \in E$. Dann ist auch $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup 0 = 0$. $\square$

Bemerkung 1.22. Die Linearität des Integrals, also

$$\int_E (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu,$$

ist nach Definition zwar klar für einfache $f, g : X \to [0, \infty)$, allerdings nicht für beliebige messbare Funktionen $f, g : X \to [0, \infty]$. Dies werden wir erst später zeigen können.

Proposition 1.23. Sei $s : X \to [0, \infty)$ eine einfache Funktion. Für $E \in \mathfrak{A}$ setze

$$\varphi(E) := \int_E s \, \mathrm{d}\mu.$$

Dann ist φ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Insbesondere gilt für $E_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$E_n \nearrow E \quad \Rightarrow \quad \int_{E_n} s \, \mathrm{d}\mu \to \int_E s \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Da wir eine positive einfache Funktion integrieren gilt $\varphi(\mathfrak{A}) \subseteq [0, \infty]$ und aus Satz 1.21 (v) folgt $\varphi(\emptyset) = 0$. Für die σ-Additivität seien $E_i \in \mathfrak{A}$ paarweise disjunkt. Setze $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ und sei $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(E) = \int_E s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_i \cap E_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_i} s \, \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_j),
\end{aligned}$$

also ist φ ein Maß. Damit ist der zweite Teil der Proposition klar aus der Stetigkeit des Maßes in Satz 1.4. □

Satz 1.24 (von der monotonen Konvergenz[9])**.** Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen auf X mit

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty$ für alle $x \in X$ und

(b) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.

Dann ist f messbar und es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Die Grenzfunktion f ist messbar nach Satz 1.14. Nach Satz 1.21 wissen wir, dass aus $f_n \leq f_{n+1}$ schon

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu$$

folgt, also ist $(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $[0, \infty]$. Somit existiert also $\alpha \in [0, \infty]$, so dass $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \alpha$. Aus $f_n \leq f$ folgt $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit im Grenzwert $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \alpha \leq \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

[9] Auch bekannt als Satz von Beppo Levi oder im Englischen “Lebesgue Monotone Convergence Theorem”.

Für die andere Ungleichung betrachte ein einfaches s mit $0 \leq s \leq f$. Fixiere $c \in (0,1)$ und setze $E_n := \{x \in X \mid f_n(x) \geq cs(x)\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- $E_n \in \mathfrak{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ (da $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$).
- $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Sei dazu $x \in X$. Falls $f(x) = 0$, dann ist auch $s(x) = 0$ und $x \in E_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist hingegen $f(x) > 0$, dann ist $cs(x) < f(x)$. Da $f_n \to f$ gibt es nun ein $n \in \mathbb{N}$ mit $cs(x) < f_n(x)$, also folgt $x \in E_n$.

Somit gilt $E_n \nearrow X$, also

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} cs \,\mathrm{d}\mu = c \int_{E_n} s \,\mathrm{d}\mu.$$

Für den Grenzwert $n \to \infty$ erhalten wir laut Proposition 1.23 für alle $c < 1$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq c \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s \,\mathrm{d}\mu = c \int_X s \,\mathrm{d}\mu,$$

also auch $\alpha \geq \int_X s \,\mathrm{d}\mu$ für alle einfachen s mit $0 \leq s \leq f$. Aber dann gilt

$$\alpha \geq \sup_{\substack{s \text{ einfach} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_X s \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu,$$

also insgesamt $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \alpha = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. □

Korollar 1.25. (1) Seien $f, g : X \to [0,\infty]$ messbar. Dann gilt

$$\int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

(2) Seien $f_n : X \to [0,\infty]$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

(3) Sei $f : X \to [0,\infty]$ messbar, dann ist ein Maß auf $\mathfrak{A}$ gegeben durch $E \mapsto \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis. (1) Seien $f, g \geq 0$ messbar. In Satz 1.14 haben wir gesehen, dass es einfache Funktionen s_n und t_n gibt mit $s_n \nearrow f$ und $t_n \nearrow g$. Dann ist $s_n + t_n$ wieder eine einfache Funktion und es gilt $s_n + t_n \nearrow f + g$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n + t_n) \,\mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X t_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

(2) Ähnlich.

(3) Folgt aus (2). □

Lemma 1.26 (Fatou)**.** Seien $f_n : X \to [0,\infty]$ für $n \in \mathbb{N}$ messbar. Dann gilt

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

1.4. Integrierbare Funktionen

Notation 1.27. Betrachte nun $f : X \to \mathbb{C}$. Wir zerlegen die Funktion gemäß

$$f = f_1 + \mathrm{i} f_2 = (f_1^+ - f_1^-) + \mathrm{i}(f_2^+ - f_2^-),$$

wobei $f_1 := \mathrm{Re}(f)$, $f_2 := \mathrm{Im}(f)$ und für $g : X \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$g^+ := \max(g, 0) \geq 0 \quad \text{sowie} \quad g^- := -\min(g, 0) \geq 0,$$

also $g = g^+ - g^-$. Die Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist genau dann messbar, wenn f_1^+, f_1^-, f_2^+ und f_2^- als Funktionen $: X \to [0, \infty)$ messbar sind.

Definition 1.28. (1) Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt *(Lebesgue-)integrierbar*, falls

$$\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Wir definieren dann das Integral als

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \left(\int f_1^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f_1^- \,\mathrm{d}\mu\right) + \mathrm{i}\left(\int f_2^+ \,\mathrm{d}\mu - f_2^- \,\mathrm{d}\mu\right) \in \mathbb{C}.$$

(2) Wir setzen

$$L^1(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist integrierbar}\}.$$

Bemerkung 1.29. (1) Wenn f messbar ist, dann ist auch $|f|$ messbar.

(2) Es gilt $0 \leq f_1^+ \leq |f|$, das heißt

$$0 \leq \int f_1^+ \,\mathrm{d}\mu \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{falls} \quad f \in L^1(\mu).$$

Analog für die anderen Integrale. Damit ist $\int f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$ für $f \in L^1(\mu)$.

Proposition 1.30. $L^1(\mu)$ ist ein komplexer Vektorraum, das heißt für $f, g \in L^1(\mu)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt auch $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$. Außerdem ist die Integration eine lineare Abbildung:

$$\int (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wenn f und g messbar sind, dann auch $\alpha f + \beta g$ nach Satz 1.12, weiterhin gilt

$$\int |\alpha f + \beta g| \,\mathrm{d}\mu \leq \int \big(|\alpha| \cdot |f| + |\beta| \cdot |g|\big) \,\mathrm{d}\mu = |\alpha| \int |f| \,\mathrm{d}\mu + |\beta| \int |g| \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

laut Satz 1.21 und Korollar 1.25. Somit ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar. Die Linearität folgt durch Nachrechnen aus der Linearität für positive Funktionen gemäß Korollar 1.25 (vergleiche etwa [Els18, Satz 3.6]). □

Satz 1.31. Für $f \in L^1(\mu)$ gilt

$$\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ so, dass
$$\alpha \int f \, \mathrm{d}\mu = \left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right|.$$
Wegen $\left|\int f \, \mathrm{d}\mu\right| \in \mathbb{R}$ erhalten wir dann
$$\begin{aligned}\left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right| = \alpha \int f \, \mathrm{d}\mu = \int \alpha f \, \mathrm{d}\mu = \mathrm{Re}\left(\int \alpha f \, \mathrm{d}\mu \right) = \int \mathrm{Re}(\alpha f) \, \mathrm{d}\mu \leq \int |\alpha f| \, \mathrm{d}\mu \\ = \int |f| \, \mathrm{d}\mu. \qquad \square\end{aligned}$$

Satz 1.32 (von der majorisierten Konvergenz[10])**.** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$, so dass der punktweise Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$ existiert. Falls es eine nicht-negative Funktion $g \in L^1(\mu)$ gibt mit
$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{und alle} \quad x \in X,$$
dann gilt $f_n, f \in L^1(\mu)$ und
$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Die Funktion f ist messbar nach Satz 1.14. Es gilt $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit
$$\int_X |f_n(x)| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g(x) \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$
da $g \in L^1(\mu)$. Damit sind die $f_n \in L^1(\mu)$. Weiterhin gilt $|f(x)| \leq g(x)$, also auch $f \in L^1(\mu)$. Es folgt
$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g,$$
also $2g - |f_n - f| \geq 0$. Mit Fatou (Lemma 1.26) erhalten wir die Abschätzung
$$\int_X \underbrace{\liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|)}_{=2g} \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) \, \mathrm{d}\mu,$$
also
$$\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \int |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \right) = \int_X 2g \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu.$$
Da $\int_X g \, \mathrm{d}\mu < \infty$ erhalten wir daraus
$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \leq 0,$$
also
$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0,$$
das heißt insbesondere existiert der Grenzwert und es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$. Somit folgt
$$0 \leq \left| \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$
also $\lim_{n\to\infty} \left| \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| = 0$ und daher $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. $\square$

[10]Im Englischen auch "Lebesgue's Dominated Convergence Theorem".

Bemerkung 1.33. (1) Die Konvergenz $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$ ist die angemessene in $L^1(\mu)$. Die Definition

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$$

liefert fast eine Norm auf $L^1(\mu)$, welche diesen zu einem Banachraum macht. Mehr dazu später.

(2) Damit $\|f\|_1$ eine Norm auf $L^1(\mu)$ liefert brauchen wir, dass aus $\|f\|_1 = 0$ schon $f = 0$ folgt; aber charakteristische Funktionen $f = 1_A$ für $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) = 0$ verletzen diese Bedingung. Daher werden wir in $L^1(\mu)$ Funktionen identifizieren, falls sie sich nur auf Mengen A mit $\mu(A) = 0$ unterscheiden:

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad \mu\big(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}\big) = 0.$$

Der Raum $L^1(\mu)$ ist dann die Menge der Äquivalenzklassen von Funktionen bezüglich $\sim$.

Definition 1.34. (1) Eine Menge M mit $\mu(M) = 0$ heißt *Nullmenge* (bezüglich μ).

(2) Eine Eigenschaft E gilt *fast überall* (abgekürzt *f.ü.*), falls $M := \{x \mid \neg E(x)\}$ eine Nullmenge ist.

Eine Eigenschaft gilt also fast überall, wenn sie nur auf einer Nullmenge verletzt ist. Insbesondere gilt

- $f = g$ fast überall, falls $\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$ und
- $f_n \to f$ fast überall, falls $\mu(\{x \mid f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0$.

Bemerkung 1.35. (1) Im Englischen sagt man “almost everywhere” für “fast überall”, dementsprechend verwendet man a.e. statt f.ü. als Abkürzung.

(2) Gilt $f = g$ fast überall, so folgt $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E g \,\mathrm{d}\mu$ für alle $E \in \mathfrak{A}$, denn nach Voraussetzung gilt $\mu(N) = 0$ für $N := \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, also

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_{E\setminus N} f \,\mathrm{d}\mu + \underbrace{\int_{E\cap N} f \,\mathrm{d}\mu}_{=0} = \int_{E\setminus N} g \,\mathrm{d}\mu + \underbrace{\int_{E\cap N} g \,\mathrm{d}\mu}_{=0} = \int_E g \,\mathrm{d}\mu,$$

da $\mu(E \cap N) = 0$.

2. Konstruktion von Maßen

2.1. Äußeres Maß

Definition 2.1. (1) Eine *Algebra von Mengen* (oder auch *Mengenalgebra*) auf einer Menge X ist eine nicht-leere Familie $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Aus $A, B \in \mathfrak{A}$ folgt $A \cup B \in \mathfrak{A}$.

(ii) Aus $A \in \mathfrak{A}$ folgt $A^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{A}$.

(2) Ein *Prämaß*[11] auf einer Algebra $\mathfrak{A}$ ist eine Funktion $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es gilt $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) μ ist *σ-additiv*: Sind $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Bemerkung 2.2. (1) Ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra, so existiert $A \in \mathfrak{A}$ da $\mathfrak{A}$ nicht-leer ist. Somit gilt $X = A \cup A^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{A}$ und $\emptyset = X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{A}$.

(2) Algebren und Prämaße sind (im Gegensatz zu σ-Algebren und Maßen) recht einfach und explizit zu konstruieren.

Beispiel 2.3. Sei $X = \mathbb{R}$, dann ist

$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ist Vereinigung von endlich vielen Intervallen}\}$$

eine Algebra auf X und

$$\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty], \quad A = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} I_k \mapsto \mu(A) := \sum_{k=1}^{n} \text{Länge}(I_k)$$

ist ein Prämaß auf $\mathfrak{A}$ (hierbei steht $\dot\bigcup$ für eine disjunkte Vereinigung). Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Definition 2.4. Sei μ ein Prämaß auf einer Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$. Wir definieren dann für alle $E \subseteq X$

$$\mu^*(E) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathfrak{A} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}$$

und nennen μ^* das von μ induzierte *äußere Maß*.

Proposition 2.5. Das äußere Maß μ^* hat die folgenden Eigenschaften:

(i) Es gilt $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Aus $A \subseteq B$ folgt $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. (Monotonie)

(iii) Es gilt $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$. (Subadditivität)

(iv) Es gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

[11] Englisch: “pre-measure” oder “measure on an algebra”.

Beweis. (i) Klar.

(ii) Klar.

(iii) Sei $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Falls $\mu^*(E_n) = \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist die Behauptung klar, da dann auf der rechten Seite der Ungleichung ∞ steht. Wir können also annehmen, dass $\mu^*(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots \in \mathfrak{A}$ mit

$$E_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{(n)} \quad \text{und} \quad \mu^*(E_n) > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^{(n)}) - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Es folgt

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{(n)},$$

also

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^{(n)}) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

mit $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir $\mu^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n)$.

(iv) Übung.[12] $\square$

2.2. Einschränkung des äußeren Maßes zu einem Maß

Definition 2.6. Eine Menge $E \subseteq X$ heißt *messbar bezüglich* μ^*, falls für alle $A \subseteq X$ gilt:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathsf{c}}).$$

Wir setzen

$$\mathfrak{M}_\mu := \{E \subseteq X \mid E \text{ ist messbar bezüglich } \mu^*\} \qquad \text{und} \qquad \overline{\mu} := \mu^*|_{\mathfrak{M}_\mu}.$$

Satz 2.7. Es gilt:

(1) $\mathfrak{M}_\mu$ ist eine σ-Algebra.

(2) $\overline{\mu}$ ist ein Maß auf $\mathfrak{M}_\mu$.

(3) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}_\mu$.

Beweis. (1) Wir überprüfen für $\mathfrak{M}_\mu$ die Axiome einer σ-Algebra:

(i) Es gilt $\emptyset \in \mathfrak{M}_\mu$ wegen

$$\mu^*(A) = 0 + \mu^*(A) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap X) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap \emptyset^{\mathsf{c}}).$$

(ii) Sei $E \in \mathfrak{M}_\mu$, dann folgt $E^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{M}_\mu$ direkt aus der Definition von $\mathfrak{M}_\mu$.

[12] Man beachte, dass für diesen Teil die σ-Additivität des Prämaßes benötigt wird.

(iii) Wir betrachten zunächst endliche Vereinigungen: Seien $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}_\mu$, zu zeigen ist dann, dass $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}_\mu$. Mit der Subadditivität gilt

$$\begin{aligned}
&\mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) + \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)^\mathsf{c}\big) \\
&\quad = \mu^*\big((A \cap E_2) \cup (A \cap E_1 \cap E_2^\mathsf{c})\big) + \mu^*\big(A \cap (E_1^\mathsf{c} \cap E_2^\mathsf{c})\big) \\
&\quad \leq \mu^*(A \cap E_2) + \underbrace{\mu^*(A \cap E_1 \cap E_2^\mathsf{c}) + \mu^*(A \cap E_1^\mathsf{c} \cap E_2^\mathsf{c})}_{=\mu^*(A \cap E_2^\mathsf{c}) \text{ wegen } E_1 \in \mathfrak{M}_\mu} \\
&\quad = \underbrace{\mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_2^\mathsf{c})}_{=\mu^*(A) \text{ wegen } E_2 \in \mathfrak{M}_\mu} \\
&\quad = \mu^*(A).
\end{aligned}$$

Die Ungleichung in die andere Richtung folgt aus der Subadditivität von μ^*, also gilt $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}_\mu$.

Sei nun $F_n \in \mathfrak{M}_\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$, zu zeigen ist, dass $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathfrak{M}_\mu$. Definiere $E_1 := F_1 \in \mathfrak{M}_\mu$ und

$$E_i := F_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} E_j = F_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} E_j\right)^\mathsf{c} = \left(F_i^\mathsf{c} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} E_j\right)^\mathsf{c} \in \mathfrak{M}_\mu \quad \text{für alle} \quad i > 1.$$

Dann ist $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Folge in $\mathfrak{M}_\mu$ mit $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Setze $G_n := \bigcup_{i=1}^n E_i$. Wegen $E_n \in \mathfrak{M}_\mu$ gilt für alle $A \subseteq X$

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap G_n) &= \mu^*\big((A \cap G_n) \cap E_n\big) + \mu^*\big((A \cap G_n) \cap E_n^\mathsf{c}\big) \\
&= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap G_{n-1}),
\end{aligned}$$

also erhalten induktiv, dass

$$\mu^*(A \cap G_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i).$$

Wegen $G_n \in \mathfrak{M}_\mu$ und $E^c \subseteq G_n^c$ folgt

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) = \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap G_n^\mathsf{c}) &\geq \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap E^\mathsf{c}) \\
&= \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^\mathsf{c}).
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ gilt dann mit der Subadditivität

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^\mathsf{c}) &\geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty (A \cap E_i)\right) + \mu^*(A \cap E^\mathsf{c}) \\
&= \mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) + \mu^*(A \cap E^\mathsf{c}) \\
&= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^\mathsf{c}).
\end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^\mathsf{c}).$$

Die andere Richtung der Ungleichung folgt wieder aus der Subadditivität, also gilt $E \in \mathfrak{M}_\mu$.

(2) Wir überprüfen für μ^* eingeschränkt auf $\mathfrak{M}_\mu$ die Axiome eines Maßes:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$ ist klar.

(ii) Zunächst zeigen wir die endliche Additivität. Seien $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}_\mu$ mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mu^*(E_1 \cup E_2) &= \mu^*\big((E_1 \cup E_2) \cap E_2\big) + \mu^*\big((E_1 \cup E_2) \cap E_2^\mathsf{c}\big)\\ &= \mu^*(E_2) + \mu^*(E_1).\end{aligned}$$

Betrachte für die σ-Additivität nun $E = \dot\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ mit $E_i \in \mathfrak{M}_\mu$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit der Monotonie des äußeren Maßes und der schon bewiesenen endlichen Additivität folgt

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(\dot\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) \geq \mu^*\left(\dot\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E_i).$$

Für $n \to \infty$ gilt also

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E_i).$$

Die andere Richtung folgt wieder aus der Subadditivität, also ist

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E_i)$$

und μ^* ist ein Maß auf $\mathfrak{M}_\mu$.

(3) Sei $E \in \mathfrak{A}$ und $A \subseteq X$. Aus der Subadditivität folgt direkt

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^\mathsf{c}),$$

es bleibt die andere Ungleichung zu zeigen. Wir können annehmen, dass $\mu^*(A) < \infty$, andernfalls gilt die Ungleichung trivialerweise. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \quad \text{und} \quad \mu^*(A) > \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) - \varepsilon.$$

Da μ auf $\mathfrak{A}$ additiv ist und wegen $A_n, E \in \mathfrak{A}$ haben wir

$$\mu(A_n) = \mu(A_n \cap E) + \mu(A_n \cap E^\mathsf{c}).$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}\mu^*(A) + \varepsilon &> \sum_{i=1}^\infty \mu(A_n \cap E) + \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n \cap E^\mathsf{c})\\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n \cap E\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n \cap E^\mathsf{c}\right)\\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^\mathsf{c}).\end{aligned}$$

Dieses Argument gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also haben wir für $\varepsilon \searrow 0$

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^\mathsf{c}).$$

Somit gilt auch die Gleichheit und es folgt $E \in \mathfrak{M}_\mu$ für alle $E \in \mathfrak{A}$ und damit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}_\mu$. $\square$

Somit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.8 (Ausdehnungssatz von Carathéodory)**.** Sei μ ein Prämaß auf einer Algebra $\mathfrak{A}$. Dann ist die Einschränkung $\overline{\mu}$ des äußeren Maßes μ^* auf die bezüglich μ^* messbaren Mengen $\mathfrak{M}_\mu$ eine Ausdehnung von μ auf eine σ-Algebra, welche $\mathfrak{A}$ enthält.

Bemerkung 2.9. Im Allgemeinen ist $\mathfrak{M}_\mu$ größer als $\sigma(\mathfrak{A})$, aber nur ein wenig größer in "guten" Fällen: Dann ist $\mathfrak{M}_\mu$ die Vervollständigung von $\sigma(\mathfrak{A})$ bezüglich μ (bzw. genauer: bezüglich des Maßes $\overline{\mu}|_{\sigma(\mathfrak{A})}$).

Satz 2.10. Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. Setze

$$\tilde{\mathfrak{M}} := \{E \subseteq X \mid \exists A, B \in \mathfrak{M} : A \subseteq E \subseteq B \text{ mit } \mu(B \setminus A) = 0\}$$

und $\tilde{\mu}(E) := \mu(A)$ in diesem Fall. Dann ist $\tilde{\mathfrak{M}}$ eine σ-Algebra und $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Beweis. Nachrechnen, vergleiche etwa [Els18, Satz 6.3]. □

Definition 2.11. Der Maßraum $(X, \tilde{\mathfrak{M}}, \tilde{\mu})$ heißt die *Vervollständigung* des Maßraums $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Definition 2.12. Ein Maß μ auf einem messbaren Raum $(X, \mathfrak{A})$ heißt

(i) ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls $\mu(X) = 1$;

(ii) *endlich*, falls $\mu(X) < \infty$; und

(iii) *σ-endlich*, falls $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ für geeignete $X_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(X_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.13. (1) σ-endliche Maße sind die "guten", nicht σ-endliche Maße haben einige pathologische Eigenschaften.

(2) Falls μ ein σ-endliches Prämaß auf einer Algebra $\mathfrak{A}$ ist, dann ist $\mathfrak{M}_\mu$ die Vervollständigung von $\sigma(\mathfrak{A})$ bezüglich $\overline{\mu}$.

2.3. Lebesgue-Maß

Definition 2.14. (1) Die Anwendung des Ausdehnungssatzes Satz 2.8 auf das Beispiel 2.3 ergibt das *Lebesgue-Maß* λ auf $\mathbb{R}$. Es ist definiert entweder auf den Borelmengen $\mathfrak{B} := \sigma(\tau)$, oder auf der Vervollständigung $\mathfrak{M}_\lambda$, den *Lebesgue-messbaren Mengen*. Das Lebesgue-Maß λ ist charakterisiert durch $\lambda([a, b]) = b - a$ (diese eindeutige Charakterisierung werden wir im nächsten Kapitel sehen).

(2) Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^k$ ergibt sich analog durch die Ausdehnung des Prämaßes, welches einem k-dimensionalen Quader $\bigtimes_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$ sein Volumen $\prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i)$ zuordnet.

Bemerkung 2.15. (1) Das Lebesgue-Maß λ ist σ-endlich auf $\mathbb{R}$, da $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ und $\lambda([-n, n]) = 2n < \infty$.

(2) Man benötigt das Auswahlaxiom um zu zeigen:

(i) Es gibt nicht-messbare Mengen, also $E \subseteq \mathbb{R}$ mit $E \notin \mathfrak{M}_\lambda$.

(ii) Es gilt $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{M}_\lambda$.

Bemerkung 2.16. (1) Mit dem Lebesgue-Maß λ auf $\mathfrak{M}_\mu$ können wir dann auch Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$) integrieren. Der Zusammenhang zum Riemann-Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ aus Analysis I ist gegeben durch

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und Riemann-integrierbare beziehungsweise Regelfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für stetige Funktionen ist das eine Übungsaufgabe.

(2) Aus dem Lebesgue-Maß λ und einer "Dichte" $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ (mit g messbar) kann man sich ein neues Maß ν auf $\mathfrak{M}_\mu$ verschaffen gemäß

$$\nu(A) := \int_A g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x),$$

siehe Übung. Die Integration bezüglich ν ist dann gegeben durch

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int f(x)g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Sind f und g Riemann-integrierbar, so gilt

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Der Satz über monotone Klassen und die Eindeutigkeit der Ausdehnung von Prämaßen

3.1. Satz über monotone Klassen

Definition 3.1. Eine Klasse $\mathcal{M}$ von Teilmengen von X heißt *monoton*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Für alle $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit $A_n \nearrow A$ gilt $A \in \mathcal{M}$.

(ii) Für alle $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit $A_n \searrow A$ gilt $A \in \mathcal{M}$.

Notation 3.2. Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann bezeichnen wir mit

$$\sigma(F) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra}}} \mathfrak{A}$$

die von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra und mit

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M} \\ \mathcal{M}\ \text{monotone Klasse}}} \mathcal{M}$$

die von $\mathcal{F}$ erzeugte monotone Klasse.

Bemerkung 3.3. (1) Die Potenzmenge $\operatorname{Pot}(X)$ ist eine monotone Klasse, der Schnitt ist also nichtleer. Man überzeugt sich leicht, dass der Durchschnitt über monotone Klassen wieder eine monotone Klasse ist. Somit ist $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ die kleinste monotone Klasse, welche $\mathcal{F}$ enthält.

(2) Eine σ-Algebra ist immer auch eine monotone Klasse, das heißt $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$.

(3) Eine Algebra $\mathfrak{S}$, die gleichzeitig eine monotone Klasse ist, ist schon eine σ-Algebra. Seien dazu $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{S}$ und setze $B_n := \bigcup_{i=1}^n A_i$. Dann gilt $B_n \nearrow \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ und weil $\mathfrak{S}$ monoton ist, folgt $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathfrak{S}$.

Satz 3.4 (über monotone Klassen)**.** Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra.

(1) Es gilt $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{M}(\mathfrak{A})$.

(2) Ist $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{M}$, so folgt $\sigma(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}$.

Beweis. (1) Setze $\mathfrak{S} := \mathcal{M}(\mathfrak{A})$. Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra ist, dann gilt nämlich $\sigma(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{S}$, die andere Inklusion gilt nach Bemerkung 3.3 (2), was dann $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ zeigt. Nach Bemerkung 3.3 (3) genügt nun zu zeigen, dass $\mathfrak{S}$ eine Algebra ist, weil $\mathfrak{S}$ bereits eine monotone Klasse ist.

Wir müssen also zeigen, dass $\mathfrak{S}$ unter Vereinigung und Komplementbildung abgeschlossen ist. Betrachte zunächst die Vereinigung. In $\mathfrak{S}$ fixiere zunächst ein $A \in \mathfrak{A}$ und setze

$$\mathcal{C}(A) := \{B \in \mathfrak{S} \mid A \cup B \in \mathfrak{S}\}.$$

Da $\mathfrak{A}$ eine Algebra ist, folgt aus $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$ schon $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{C}(A)$. Seien nun $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{C}(A)$ mit $B_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{S}$. Dann folgt

$$A \cup B_1, A \cup B_2, \ldots \in \mathfrak{S} \quad \text{und} \quad A \cup B_n \nearrow A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Da $\mathfrak{S}$ monoton ist, folgt $A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{S}$ und somit $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}(A)$.

Dies funktioniert analog auch für $B_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, also ist $\mathcal{C}(A)$ eine monotone Klasse und $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{C}(A)$, damit gilt $\mathcal{C}(A) \supseteq \mathfrak{S}$, die andere Inklusion ist klar nach der Definition, das heißt $\mathcal{C}(A) = \mathfrak{S}$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. Somit haben wir gezeigt: Für alle $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{S}$ gilt $A \cup B \in \mathfrak{S}$.

Fixiere nun $B \in \mathfrak{S}$ und setze

$$\mathcal{C}(B) := \{A \in \mathfrak{S} \mid A \cup B \in \mathfrak{S}\}.$$

Mit den selben Argumenten wie oben gilt $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{C}(B)$ und $\mathcal{C}(B) = \mathfrak{S}$, also folgt: Für alle $A, B \in \mathfrak{S}$ gilt $A \cup B \in \mathfrak{S}$.

Analog zeigen wir die Abgeschlossenheit bezüglich dem Komplement, also ist $\mathfrak{S}$ eine Algebra.

(2) Da $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ die kleinste monotone Klasse ist, die $\mathfrak{A}$ enthält, folgt

$$\sigma(\mathfrak{A}) \overset{(1)}{=} \mathcal{M}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}.$$

□

3.2. Eindeutigkeit der Ausdehnung von Prämaßen

Satz 3.5 (Eindeutigkeit der Ausdehnung von Maßen)**.** Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra und μ_1, μ_2 zwei σ-endliche Maße auf $\sigma(\mathfrak{A})$. Falls $\mu_1|_{\mathfrak{A}} = \mu_2|_{\mathfrak{A}}$, so gilt schon $\mu_1 = \mu_2$ auf ganz $\sigma(\mathfrak{A})$.

Beweis. Betrachte zunächst endliche Maße μ_1 und μ_2. Setze

$$\mathcal{M} := \{A \in \sigma(\mathfrak{A}) \mid \mu_1(A) = \mu_2(A)\}.$$

Gemäß Voraussetzung gilt nun $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{M}$. Wenn wir nun zeigen können, dass $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist, dann gilt $\sigma(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}$ laut Satz 3.4 und somit $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{M}$.

Zur Monotonie von $\mathcal{M}$ seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit $A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, dann gilt

$$\mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(A_n) = \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right),$$

also $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$. Analog für $A_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.[13]

Den σ-endlichen Fall führt man auf den endlichen Fall zurück durch Einschränkung von μ_1 und μ_2 auf X_n, wobei $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. □

Bemerkung 3.6. (1) Die Eindeutigkeit der Ausdehnung geht verloren wenn das Maß nicht σ-endlich ist.

[13] Da μ_1 und μ_2 endlich sind, ist die Voraussetzung $\mu(A_n) < \infty$ aus Satz 1.4 erfüllt.

(2) Satz 3.5 und Bemerkung 2.13 zeigen, dass das Lebesgue-Maß sowohl auf Borel-Mengen als auch auf den Lebesgue-messbaren Mengen eindeutig durch seine Werte auf Intervallen bestimmt ist.

(3) Der Satz über monotone Klassen (Satz 3.4) ist ein wichtiges Werkzeug, um Aussagen von "einfachen" auf "komplizierte" Mengen fortzusetzen. Oft werden stattdessen auch Dynkin-Systeme und π-λ-Systeme benutzt.

4. Die Vektorräume $\mathcal{C}_c(X)$, $\mathcal{C}_0(X)$ und der Riesz'sche Darstellungssatz

4.1. Die Vektorräume $\mathcal{C}_c(X)$, $\mathcal{C}_0(X)$

Definition 4.1. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(1) Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(2) Eine *Umgebung* von $x \in X$ ist eine Menge $N \subseteq X$, so dass es ein $U \in \tau$ gibt mit $x \in U \subseteq N$.

(3) Der Raum X heißt *lokalkompakt*, falls jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

(4) Der Raum X heißt *Hausdorff'sch* oder *Hausdorff-Raum*, falls gilt: Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es Umgebungen N_x von x und N_y von y mit $N_x \cap N_y = \emptyset$.

Beispiel 4.2. (1) $X = \mathbb{R}$ ist lokalkompakt, aber nicht kompakt; $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt.

(2) Alle metrischen Räume und insbesondere alle normierten Vektorräume sind Hausdorff'sch.

(3) Sei X ein Banachraum, dann ist X ist genau dann lokalkompakt, wenn X endlichdimensional ist.

Notation 4.3. Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum.

(1) Der Raum aller stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{C}$ ist
$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}.$$

(2) Der Raum aller *stetigen Funktionen mit kompaktem Träger* ist
$$\mathcal{C}_c(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und } \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\} \subseteq \mathcal{C}(X),$$
wobei $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$ der *Träger* von f ist.

(3) Der Raum aller *stetigen Funktionen, welche im Unendlichen verschwinden*, ist
$$\mathcal{C}_0(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und verschwindet im Unendlichen}\} \subseteq \mathcal{C}(X),$$
wobei f genau dann im Unendlichen verschwindet, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq X$ existiert, so dass für alle $x \notin K$ schon $|f(x)| < \varepsilon$ gilt.

Es gilt immer $\mathcal{C}_c(X) \subseteq \mathcal{C}_0(X) \subseteq \mathcal{C}(X)$, für kompaktes X gilt $\mathcal{C}_c(X) = \mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}(X)$.

Bemerkung 4.4. (1) $\mathcal{C}_c(X)$ und $\mathcal{C}_0(X)$ sind Vektorräume über $\mathbb{C}$; falls X eine unendliche Menge ist, so sind die Vektorräume unendlich-dimensional.

(2) Durch $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ ist eine Norm auf $\mathcal{C}_c(X)$ und $\mathcal{C}_0(X)$ definiert.

(3) Der Raum $\mathcal{C}_0(X)$ ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, also ein Banachraum. Falls X nicht kompakt ist, ist $\mathcal{C}_c(X)$ im Allgemeinen nicht vollständig, es gilt
$$\mathcal{C}_0(X) = \overline{\mathcal{C}_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty}.$$

(4) Die beiden Räume $\mathcal{C}_0(X)$ und $\mathcal{C}_c(X)$ sind Teilräume von
$$\mathcal{C}_b(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\},$$
dem Raum der stetigen beschränkten Abbildungen von X nach $\mathbb{C}$.

4.2. Riesz'scher Darstellungssatz für $\mathcal{C}_c(X)$

Bemerkung 4.5. Sei μ ein Borelmaß auf X (also ein Maß auf der Borel-σ-Algebra), so dass $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$. Dann ist f integrierbar für alle $f \in \mathcal{C}_c(X)$, denn es gilt

$$\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_{\operatorname{supp}(f)} |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{\operatorname{supp}(f)} \|f\|_\infty \, \mathrm{d}\mu = \mu(\operatorname{supp} f) \cdot \|f\|_\infty < \infty.$$

Weiterhin ist

$$\int_X : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

ein lineares Funktional und auch positiv: Aus $f \geq 0$ folgt $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq 0$.

Satz 4.6 (Riesz'scher Darstellungssatz)**.** Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $\Lambda : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional auf $\mathcal{C}_c(X)$. Dann gibt es ein Borel-Maß μ auf X, so dass

$$\Lambda(f) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{C}_c(X).$$

Das Maß μ hat die folgenden Regularitätseigenschaften:

(i) Es gilt $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$.

(ii) Es gilt $\mu(E) = \inf \{\mu(V) \mid E \subseteq V, V \text{ offen}\}$ für alle $E \in \mathfrak{B}$.

(iii) Es gilt $\mu(E) = \sup \{\mu(K) \mid K \subseteq E, K \text{ kompakt}\}$ für alle $E \in \mathfrak{B}$ mit $\mu(E) < \infty$.

Zusammen mit obiger Gleichung bestimmen diese Regularitätseigenschaften das Maß μ eindeutig.

Bemerkung 4.7. In vielen Situationen (wie zum Beispiel wenn X kompakt ist oder für $X = \mathbb{R}$) gilt: Ein Borel-Maß, welches (i) aus Satz 4.6 erfüllt, erfüllt auch (ii) und (iii).

Beweisskizze von Satz 4.6. Das gesuchte Maß $\mu(E)$ entspricht gerade $\Lambda(1_E)$, welches wir uns aus der Kenntnis von Λ auf stetigen Funktionen beschaffen müssen. Dazu approximieren wir 1_E in geeigneter Weise durch stetige Funktionen, wobei die Positivität von Λ einer Stetigkeitseigenschaft entspricht. Es reicht $\mu(V)$ für offene Mengen V zu kennen (für andere Mengen können wir es dann gemäß Eigenschaft (ii) definieren), dafür setzen wir

$$\mu(V) := \sup \{\Lambda(f) \mid f \in \mathcal{C}_c(X) \text{ mit } 0 \leq f \leq 1_V\}.$$

Es bleiben dann sehr viele Einzelheiten nachzuprüfen, siehe [Rud09, 2.14] oder [RF10, 13.23] oder [Els18, VIII 2.5]. □

4.3. Ausdehnung auf $\mathcal{C}_0(X)$

Bemerkung 4.8. Das lineare Funktional Λ aus Satz 4.6 dehnt im Allgemeinen nicht auf $\mathcal{C}_0(X)$ aus. Ein Beispiel dafür ist das Lebesgue-Maß λ auf $\mathbb{R}$, in diesem Fall gilt

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Die Funktion

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{falls } |x| \geq 1, \\ 1, & \text{falls } |x| < 1, \end{cases}$$

liegt in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, aber nicht in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, und es gilt $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\lambda = +\infty$.

Allgemeiner gilt: Sei $\Lambda : \mathcal{C}_0(X) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional. Dann ist

$$\|\Lambda\| := \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}_0(X) \\ f \neq 0}} \frac{|\Lambda(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}_0(X) \\ \|f\|=1}} |\Lambda(f)| < \infty$$[14]

und Λ ist somit beschränkt, also stetig (bzgl. der Supremumsnorm): Sei nämlich $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $f_n \to f$. Aus

$$|\Lambda(f_n) - \Lambda(f)| = |\Lambda(f_n - f)| \leq \|\Lambda\| \cdot \|f_n - f\| \to 0$$

folgt $\Lambda(f_n) \to \Lambda(f)$ und damit die Stetigkeit von Λ.

Somit gilt dann aber

$$\mu(X) = \sup\left\{\Lambda(f) \mid f \in \mathcal{C}_c(X) \text{ mit } 0 \leq f \leq 1\right\} \leq \|\Lambda\| < \infty,$$

somit sind die positiven linearen Funktionale auf $\mathcal{C}_0(X)$ durch endliche Borel-Maße gegeben.

Satz 4.9. Sei $\Lambda : \mathcal{C}_0(X) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional. Dann ist Λ beschränkt, also $\|\Lambda\| < \infty$ (und damit insbesondere stetig).

Beweis. Angenommen, Λ wäre unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_0(X)$ mit $\|f_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $|\Lambda(f_n)| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Wegen der Zerlegung

$$f = \big(\mathrm{Re}(f)\big)^+ - \big(\mathrm{Re}(f)\big)^- + \mathrm{i}\Big(\big(\mathrm{Im}(f)\big)^+ - \big(\mathrm{Im}(f)\big)^-\Big)$$

finden wir dann auch solche Folgen mit $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $\Lambda(f_n) \geq 2^n$. Setze dann

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$$

Es ist $f \in \mathcal{C}_0(X)$, da f durch eine Cauchyfolge gegeben ist und $\mathcal{C}_0(X)$ vollständig ist. Dann gilt aber

$$\underbrace{\Lambda(f)}_{\in\mathbb{R}} \geq \Lambda\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\frac{\Lambda(f_n)}{2^n}}_{\geq 1} \geq N \quad \text{für alle} \quad N \in \mathbb{N},$$

was im Widerspruch zu $\Lambda(f) < \infty$ steht. Somit muss Λ beschränkt sein. □

[14] Es ist nicht offensichtlich, dass aus der Positivität von Λ die Beschränktheit $\|\Lambda\| < \infty$ folgt. Diese wichtige Tatsache wird in Satz 4.9 bewiesen.

5. Produktmaße und der Satz von Fubini

5.1. Produktmaße

Definition 5.1. Seien X und Y zwei Mengen.

(1) Das *kartesische Produkt* $X \times Y$ ist die Menge

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Eine Menge der Form $A \times B \subseteq X \times Y$ für $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ heißt *Rechteck* in $X \times Y$.

(2) Sei $\mathfrak{X}$ eine σ-Algebra auf X und $\mathfrak{Y}$ eine σ-Algebra auf Y. Ein *messbares Rechteck* ist dann eine Menge der Form $A \times B$ mit $A \in \mathfrak{X}$ und $B \in \mathfrak{Y}$. Die zugehörige *Produkt-σ-Algebra* ist definiert als

$$\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} := \sigma\big(\{A \times B \mid A \in \mathfrak{X}, B \in \mathfrak{Y}\}\big).$$

(3) Für gegebene $E \in X \times Y$, $x \in X$ und $y \in Y$ definieren wir die *Schnitte* E_x und E^y durch

$$E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \subseteq Y \quad \text{und} \quad E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\} \subseteq X.$$

Konvention. Im Folgenden seien $(X, \mathfrak{X})$ und $(Y, \mathfrak{Y})$ zwei messbare Räume.

Satz 5.2. Setze

$$\mathfrak{A} := \left\{ Q = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \mid n \in \mathbb{N}, R_i \text{ messbare Rechtecke}, R_i \cap R_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \right\}.$$

Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra und somit gilt $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} = \mathcal{M}(\mathfrak{A})$.

Beweis. Damit $\mathfrak{A}$ eine Algebra ist, muss $\mathfrak{A}$ unter Komplementbildung und (endlicher) Vereinigung abgeschlossen sein.

(i) Sei $Q = \dot\bigcup_{i=1}^{n} R_i \in \mathfrak{A}$. Für $n = 1$, also $Q = A \times B$ mit $A \in \mathfrak{X}$ und $B \in \mathfrak{Y}$, gilt

$$Q^{\mathsf{c}} = (A^{\mathsf{c}} \times B) \cup (A \times B^{\mathsf{c}}) \cup (A^{\mathsf{c}} \times B^{\mathsf{c}}) \in \mathfrak{A}.$$

Ist R Vereinigung von mehr Rechtecken, funktioniert dies analog mit disjunkten Zerlegungen.

(ii) Sind $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{A}$, so folgt $Q_1 \cup Q_2 \in \mathfrak{A}$, da jede Vereinigung von zwei Rechtecken als disjunkte Vereinigung mehrerer kleinerer Rechtecke geschrieben werden kann.

Somit ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra. Damit ist dann aber nach dem Satz über monotone Klassen (Satz 3.4)

$$\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} = \sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}). \qquad \square$$

Satz 5.3. Sei $E \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. Dann gilt $E_x \in \mathfrak{Y}$ für alle $x \in X$ und $E^y \in \mathfrak{X}$ für alle $y \in Y$.

Beweis. Setze
$$\mathfrak{F} := \{E \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \mid E_x \in \mathfrak{Y} \text{ für alle } x \in X\}\,.$$
Es reicht zu zeigen, dass die messbaren Rechtecke in $\mathfrak{F}$ liegen und dass $\mathfrak{F}$ eine σ-Algebra ist, denn dann liegt die von den messbaren Rechtecken erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{F}$, also gilt $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} = \mathfrak{F}$.

(i) Sei $E = A \times B$ ein messbares Rechteck, also $A \in \mathfrak{X}$ und $B \in \mathfrak{Y}$. Dann gilt
$$E_x = \begin{cases} B, & \text{falls } x \in A, \\ \emptyset, & \text{falls } x \in A^{\mathsf{c}}, \end{cases}$$
also $E_x \in \mathfrak{Y}$ für alle $x \in X$ und somit $E \in \mathfrak{F}$.

(ii) Sind $E, E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{F}$, so gilt für alle $x \in X$
$$(E^{\mathsf{c}})_x = (E_x)^{\mathsf{c}} \quad \text{und} \quad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_x,$$
woraus direkt folgt, dass $\mathfrak{F}$ eine σ-Algebra ist.

Der zweite Teil der Aussage folgt analog. □

Notation 5.4. Sei $f : X \times Y \to \mathbb{C}$. Wir setzen
$$f_x : Y \to \mathbb{C}, \quad y \mapsto f_x(y) := f(x,y) \quad \text{für alle} \quad x \in X$$
sowie
$$f^y : X \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f^y(x) := f(x,y) \quad \text{für alle} \quad y \in Y.$$

Satz 5.5. Sei $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ eine $(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$-messbare Funktion auf $X \times Y$. Dann ist f_x für jedes $x \in X$ eine $\mathfrak{Y}$-messbare Funktion auf Y und f^y für jedes $y \in Y$ eine $\mathfrak{X}$-messbare Funktion auf X.

Beweis. Es genügt reellwertige Funktionen zu betrachten. Sei also $x \in X$ fest und $B \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelmenge, zu zeigen ist, dass $f_x^{-1}(B) \in \mathfrak{Y}$. Wir haben
$$f_x^{-1}(B) = \{y \in Y \mid f_x(y) \in B\} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y \mid f(\tilde{x}, \tilde{y}) \in B\}_x = \big(f^{-1}(B)\big)_x.$$
Aus der Messbarkeit von f folgt $f^{-1}(B) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, also gilt nach Satz 5.3 $(f^{-1}(B))_x \in \mathfrak{Y}$. Somit gilt
$$f_x^{-1}(B) = \big(f^{-1}(B)\big)_x \in \mathfrak{Y} \quad \text{für alle} \quad B \in \mathfrak{B}$$
und f_x ist $\mathfrak{Y}$-messbar. Der zweite Teil der Aussage folgt analog. □

Satz 5.6. Seien $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ und $(Y, \mathfrak{Y}, \nu)$ Maßräume mit σ-endlichen Maßen. Für $Q \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ setze
$$\varphi : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \nu(Q_x) \quad \text{sowie} \quad \psi : Y \to \mathbb{R},\ y \mapsto \mu(Q^y).$$
Dann ist φ $\mathfrak{X}$-messbar und ψ $\mathfrak{Y}$-messbar und es gilt
$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_Y \psi \,\mathrm{d}\nu.$$

Beweis. Wir betrachten nur den Fall endlicher Maße μ und ν. Setze

$$\mathfrak{F} := \{Q \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \mid Q \text{ erfüllt die Behauptung des Satzes}\}.$$[15]

Sei $\mathfrak{A}$ die Algebra der messbaren Rechtecke aus Satz 5.2. Es reicht zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F}$ und dass $\mathfrak{F}$ eine monotone Klasse ist, denn dann folgt $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{F}$.

(i) Betrachte zunächst $Q = R = A \times B$ für $A \in \mathfrak{X}$ und $B \in \mathfrak{Y}$. Dann gilt

$$Q_x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \emptyset, & x \notin A, \end{cases} \quad \text{sowie} \quad Q^y = \begin{cases} A, & y \in B, \\ \emptyset, & y \notin B, \end{cases}$$

also

$$\varphi(x) = \nu(Q_x) = \nu(B) \cdot 1_A(x) \quad \text{und} \quad \psi(y) = \mu(Q^y) = \mu(A) \cdot 1_B(x).$$

Damit sind φ und ψ messbar. Es gilt

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \nu(B) \int_X 1_A(x) \,\mathrm{d}\nu(x) = \nu(B)\mu(A)$$

und

$$\int_Y \psi \,\mathrm{d}\nu = \mu(A) \int_Y 1_B(y) \,\mathrm{d}\mu(y) = \mu(A)\nu(B),$$

also $Q \in \mathfrak{F}$.

Betrachte nun $Q = R_1 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} R_n$ mit paarweise disjunkten messbaren Rechtecken R_i. Mit ähnlichen Argumenten wie für ein Rechteck gilt dann auch $Q \in \mathfrak{F}$. Beachte dabei, dass $Q_x = (R_1)_x \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} (R_n)_x$, also dass Q_x für alle $x \in X$ eine disjunkte Vereinigung ist.

(ii) Betrachte $Q_i \nearrow Q := \bigcup_{i=1}^\infty Q_i$ mit $Q_i \in \mathfrak{F}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, zu zeigen ist, dass $Q \in \mathfrak{F}$. Setze

$$\varphi_i(x) := \nu(Q_{i,x}), \quad \varphi(x) := \nu(Q_x), \quad \psi_i(y) := \mu(Q_i^y) \quad \text{und} \quad \psi(y) := \mu(Q^y).$$

Wegen $(Q_i)_x \nearrow Q_x$ gilt

$$\varphi_i(x) = \nu(Q_{i,x}) \to \nu(Q_x) = \varphi(x),$$

also $\varphi_i(x) \nearrow \varphi(x)$ für alle $x \in X$, analog gilt $\psi_i(y) \nearrow \psi(y)$ für alle $y \in Y$. Da alle φ_i und ψ_i messbar sind, sind laut dem Satz über die monotone Konvergenz Satz 1.24 auch φ und ψ messbar und es gilt

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int_X \varphi_i \,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int_Y \psi_i \,\mathrm{d}\nu = \int_Y \psi \,\mathrm{d}\nu,$$

also $Q \in \mathfrak{F}$.

Analog für $Q_i \searrow Q$, da die betrachteten Maße alle endlich sind.[16]

Damit ist $\mathfrak{F}$ eine monotone Klasse. □

[15] $Q \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ erfüllt die Behauptung des Satzes, wenn $x \mapsto \nu(Q_x)$ $\mathfrak{X}$-messbar ist, $y \mapsto \mu(Q^y)$ $\mathfrak{Y}$-messbar ist und $\int_X \nu(Q_x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ gilt.

[16] In diesem Fall ist $\varphi_i(x)$ eine absteigende Folge, so dass der Satz von der monotonen Konvergenz nicht direkt anwendbar ist. Man kann dann aber auf majorisierte Konvergenz zurückgreifen, da φ_1 eine integrierbare Majorante ist.

Definition 5.7. Für $Q \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ definieren wir das *Produktmaß* von μ und ν mittels

$$(\mu \times \nu)(Q) := \int_X \nu(Q_x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y) \, \mathrm{d}\nu(y).$$

Satz 5.8. Seien $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ und $(Y, \mathfrak{Y}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume. Dann ist $(\mu \times \nu)$ ein σ-endliches Maß auf $X \times Y$, welches eindeutig bestimmt ist durch seine Werte auf den messbaren Rechtecken

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{X}, B \in \mathfrak{Y}.$$

Sind μ und ν endliche Maße, dann ist auch $\mu \times \nu$ ein endliches Maß.

Beweis. (i) Offensichtlich gilt $(\mu \times \nu)(\emptyset) = 0$ und $(\mu \times \nu)(Q) \geq 0$ für alle $Q \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. Für die σ-Additivität seien $Q_n \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt, dann gilt

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} Q_n\right) = \int_X \nu\left(\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} Q_n\right)_x\right) \mathrm{d}\mu(x) &= \int_X \nu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (Q_n)_x\right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu((Q_i)_x) \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\overset{1.25}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu((Q_i)_x) \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(Q_i),\end{aligned}$$

also ist $\mu \times \nu$ ein Maß.

(ii) Da μ und ν σ-endlich sind, gibt es $X_n \in \mathfrak{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $Y_m \in \mathfrak{Y}$ $(m \in \mathbb{N})$ mit $\mu(X_n) < \infty$ und $\nu(Y_m) < \infty$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, so dass $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ und $Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$. Dann gilt $X \times Y = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} (X_n \times Y_m)$ und

$$(\mu \times \nu)(X_n \times Y_m) = \mu(X_n) \cdot \nu(Y_m) < \infty \quad \text{für alle} \quad n, m \in \mathbb{N},$$

also ist auch $\mu \times \nu$ σ-endlich.

(iii) Sind μ und ν beide endlich, so ist auch $\mu \times \nu$ wieder endlich, da $(\mu \times \nu)(X \times Y) = \mu(X) \cdot \nu(Y) < \infty$.

(iv) Schließlich ist das Maß $(\mu \times \nu)$ durch $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ auf der Algebra $\mathfrak{A}$ bestimmt und somit nach dem Ausdehnungssatz Satz 3.5 auch eindeutig auf $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. ☐

Bemerkung 5.9. (1) Sei λ^n das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, welches laut Definition 2.14 einem n-dimensionalen Quader sein Volumen zuordnet. Laut Satz 5.8 gilt $\lambda^{m+n} = \lambda^m \times \lambda^n$, insbesondere $\lambda^n = \bigtimes_{i=1}^{n} \lambda$.

(2) Man beachte, dass die Produkt-σ-Algebra zwar die Borel-Struktur, nicht aber die Lebesgue-Struktur erhält: Es gilt $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, aber auf der Seite der Vervollständigungen hat man nur $\mathfrak{M}_\lambda(\mathbb{R}^m) \times \mathfrak{M}_\lambda(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathfrak{M}_\lambda(\mathbb{R}^{m+n})$, wobei die Inklusion strikt ist. Bei der Aussage $\lambda^{m+n} = \lambda^m \times \lambda^n$ sollten wir die Lebesgue-Maße also auf den Borel-σ-Algebren betrachten.

5.2. Satz von Fubini

Satz 5.10 (von Fubini)**.** Seien $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ und $(Y, \mathfrak{Y}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ eine $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$-messbare Funktion auf $X \times Y$.

(1) Sei $0 \leq f \leq \infty$. Definiere

$$\varphi : X \to [0, \infty],\ x \mapsto \int_Y f_x \,\mathrm{d}\nu \quad \text{und} \quad \psi : Y \to [0, \infty],\ y \mapsto \int_X f^y \,\mathrm{d}\mu.$$

Dann ist φ $\mathfrak{X}$-messbar, ψ $\mathfrak{Y}$-messbar und es gilt

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) &= \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) \\ &= \int_Y \psi \,\mathrm{d}\nu \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

(2) Ist f komplexwertig und gilt

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) < \infty,$$

dann ist $f \in L^1(\mu \times \nu)$.

(3) Sei $f \in L^1(\mu \times \nu)$, dann ist $f_x \in L^1(\nu)$ für fast alle $x \in X$, genauso $f^y \in L^1(\mu)$ für fast alle $y \in Y$ und die Funktionen φ, ψ, definiert wie in (1) fast überall, sind in $L^1(\mu)$ beziehungsweise $L^1(\nu)$ und die Gleichung aus (1) gilt.

Beweis. (i) Nach Satz 5.5 sind f_x und f^y messbar sowie φ und ψ wohldefiniert (wobei $+\infty$ als Wert zugelassen ist). Betrachte nun zunächst $f = 1_Q$ für $Q \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. Dann gilt

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu)$$

sowie

$$\int_X \underbrace{\left(\int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right)}_{=\nu(Q_x)} \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \nu(Q_x) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

und

$$\int_Y \underbrace{\left(\int_X f(x,y) \,\mathrm{d}\mu(x) \right)}_{=\mu(Q^y)} \mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \mu(Q^y) \,d\nu(x)\,.$$

Nach Satz 5.6 und Definition 5.7 folgt die Behauptung also in diesem Fall. Betrachtung von Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen liefert die Behauptung für nicht-negative einfache Funktionen wegen der Linearität des Integrals.

Für allgemeine messbare Funktionen $f \geq 0$ gibt es laut Satz 1.17 einfache Funktionen $s_n \geq 0$, so dass punktweise $s_n \nearrow f$ gilt.[17] Setze $\varphi_n(x) := \int_Y (s_n)_x \, \mathrm{d}\nu$. Mit dem Satz über die monotone Konvergenz (Satz 1.24) gilt $\varphi_n(x) \nearrow \varphi(x)$ für alle $x \in X$. Mit dem bereits Gezeigten gilt

$$\int_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \times Y} s_n \, \mathrm{d}(\mu \times \nu),$$

also mit Satz 1.24 auch

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \varphi_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{X \times Y} s_n \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu).$$

Analog für ψ.

(ii) Wende (1) auf $|f|$ an.

(iii) Es genügt, die Aussage für reellwertige Funktionen zu zeigen, für komplexwertige Funktionen betrachte reellen und komplexen Anteil separat. Wie in Notation 1.27 zerlegen wir $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ als $f = f^+ - f^-$ und nennen die zu f, f^+, und f^- zugehörigen φ-Funktionen φ, φ_1 und φ_2.[18] Wegen $f \in L^1(\mu \times \nu)$ gilt

$$\int_X \varphi_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \times Y} f^+ \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) \leq \int_{X \times Y} |f| \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) < \infty,$$

also $\varphi_1 \in L^1(\mu)$; analog folgt $\varphi_2 \in L^1(\mu)$.

Wegen $f_x = (f^+)_x - (f^-)_x$ erhalten wir

$$\int_Y f_x \, \mathrm{d}\nu = \underbrace{\int_Y (f^+)_x \, \mathrm{d}\nu}_{\varphi_1(x)} - \underbrace{\int_Y (f^-)_x \, \mathrm{d}\nu}_{\varphi_2(x)},$$

falls $\varphi_1(x) < \infty$ und $\varphi_2(x) < \infty$. Wegen $\varphi_1 \in L^1(\mu)$ und $\varphi_2 \in L^1(\mu)$ gilt fast überall $\varphi_1(x) < \infty$ und $\varphi_2(x) < \infty$, also ist $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) < \infty$ fast überall, also gilt $\varphi \in L^1(\mu)$. Mit (1) folgt dann

$$\int_X \varphi_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \times Y} f^+ \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) < \infty \quad \text{und} \quad \int_X \varphi_2 \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \times Y} f^- \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) < \infty,$$

also (da $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$ fast überall)

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_X (\varphi_1 - \varphi_2) \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \times Y} (f^+ - f^-) \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu).$$

Für ψ analog. $\square$

Bemerkung 5.11. Analog zum Fall $n = 1$ aus Analysis I kann man auch für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ im $\mathbb{R}^n$ ein Riemann-Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ definieren, wenn man Intervalle durch Quader ersetzt. Der Satz von Fubini erlaubt es uns insbesondere diese Integration im $\mathbb{R}^n$ über Funktionen von n Argumenten auf n iterierte Integrale in $\mathbb{R}$ zurückzuführen. Sei dazu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig (oder allgemeiner Riemann-integrierbar im $\mathbb{R}^n$), dann gilt:

[17] Es gilt also $s_n(x, y) \nearrow f(x, y)$ für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$.
[18] Da f^+ und f^- positiv sind, gilt dies auch für φ_1 und φ_2.

(i) Falls $f \geq 0$, so ist immer

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}\lambda^n(x_1, \ldots, x_n) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} \left(\ldots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}\lambda(x_1) \right) \mathrm{d}\lambda(x_2) \right) \ldots \right) \mathrm{d}\lambda(x_n) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ldots \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_n \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ldots \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_{\rho(1)} \right) \mathrm{d}x_{\rho(2)} \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_{\rho(n)}
\end{aligned}$$

für jede Permutation ρ von $\{1, \ldots, n\}$, die iterierten Riemann-Integrale können also in beliebiger Integrationsreihenfolge berechnet werden.

(ii) Sei nun f eine beliebige komplex-wertige (stetige oder Riemann-integrierbare) Funktion, dann gilt das Gleiche (also die Gleichheit des Riemann-Integrales und des Lebesgue-Integrales im $\mathbb{R}^n$, sowie die Gleichheit dieser mit allen iterierten Integralen), sofern f Lebesgue-integrierbar ist, also $f \in L^1(\lambda^n)$. Um dies zu überprüfen, müssen wir nachprüfen, dass das iterierte Integral über $|f|$ endlich ist (wobei die Reihenfolge der iterierten Integrationen gemäß (i) beliebig ist).

Beispiel 5.12. Wir wollen das Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ berechnen. Da wir keine Stammfunktion von e^{-x^2} kennen, können wir es nicht direkt mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung berechnen. Wir verknüpfen dieses Integral deshalb mit einem Doppelintegral und benutzen Fubini, um dieses dann auszurechnen.

Wir betrachten das Doppelintegral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} f(y,x)\,\mathrm{d}\lambda^2(y,x),$$

wobei

$$f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty), \quad (y,x) \mapsto y \exp\left(-(1+x^2)y^2\right).$$

Mit dem Satz von Fubini (Satz 5.10) erhalten wir

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Einerseits gilt gemäß der Substitution $xy \to t$ und $\mathrm{d}x \to \frac{1}{y}\,\mathrm{d}t$ für die rechte Seite

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}x \right) y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{1}{y} \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \right) y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \right) \cdot \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \right) \\
&= \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \right)^2,
\end{aligned}$$

andererseits gilt für die linke Seite

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty y \mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \underbrace{\left[\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2} \right]_{y=0}^{y=\infty}}_{=0-1=-1} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[\arctan(x) \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Somit erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6. Bildmaße und Transformationsformel

6.1. Bildmaße

Motivation 6.1. Für die Integration in $\mathbb{R}$ haben wir die Substitutionsregel:

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob es ein allgemeines Analogon zu dieser Situation gibt. Zunächst betrachten wir eine abstrakte Version dazu.

Satz 6.2 (und Definition)**.** Seien $(X,\mathfrak{A})$ sowie $(Y,\mathfrak{M})$ zwei messbare Räume und zusätzlich $T : X \to Y$ eine messbare Abbildung. Für ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$ definieren wir eine Abbildung $T(\mu)$ durch

$$T(\mu) : \mathfrak{M} \to [0,\infty], \quad A \mapsto T(\mu)(A) := \mu\big(T^{-1}(A)\big)$$

Dann ist $T(\mu)$ ein Maß auf $\mathfrak{M}$, das sogenannte *Bildmaß* von μ bezüglich T.

Beweis. Es gilt

$$T(\mu)(\emptyset) = \mu\big(T^{-1}(\emptyset)\big) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Familie in $\mathfrak{M}$, dann gilt

$$\begin{aligned} T(\mu)\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n\right) = \mu\left(T^{-1}\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n\right)\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} T^{-1}(A_n)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(T^{-1}(A_n)\big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} T(\mu)(A_n), \end{aligned}$$

also ist $T(\mu)$ tatsächlich ein Maß auf $\mathfrak{M}$. □

Satz 6.3. Seien $(X,\mathfrak{A})$ sowie $(Y,\mathfrak{M})$ zwei messbare Räume, $T : X \to Y$ messbar, μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$ und $T(\mu)$ das Bildmaß von μ bezüglich T. Sei weiter $f : Y \to \mathbb{C}$ messbar, dann sind äquivalent:

(i) $f : Y \to \mathbb{C}$ ist integrierbar bezüglich $T(\mu)$.

(ii) $f \circ T : X \to \mathbb{C}$ ist integrierbar bezüglich μ.

In diesem Fall gilt

$$\int_Y f(y)\,\mathrm{d}T(\mu)(y) = \int_X f\big(T(x)\big)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Beweis. Übung. □

Bemerkung 6.4. Satz 6.3 erlaubt es, das Integral $\int_X f(T(x))\,\mathrm{d}\mu(x)$ durch die Substitution $y = T(x)$ auf ein "einfacheres" Integral zurückzuführen, allerdings bezüglich des Bildmaßes $T(\mu)$. Solange wir letzteres nicht kennen, ist die Substitution nicht besonders hilfreich. Im Fall $X = Y = \mathbb{R}^n$ und $\mu = \lambda^n$ können wir $T(\lambda^n)$ mit Hilfe einer sogenannten Dichte wieder durch λ^n ausdrücken.

Definition 6.5. Seien μ, ν zwei Maße auf einem messbaren Raum $(X, \mathfrak{A})$, weiterhin sei $h : X \to [0, \infty]$ messbar. Falls

$$\nu(E) = \int_E h \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $E \in \mathfrak{A}$ gilt, dann sagen wir: ν *hat die Dichte* h bezüglich μ. Übliche Bezeichnungen dafür sind $\mathrm{d}\nu = h \, \mathrm{d}\mu$ oder $h = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

Bemerkung 6.6. (1) Die Dichte h ist fast sicher eindeutig bestimmt: Gilt

$$\int_E h_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_E h_2 \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $E \in \mathfrak{A}$, so ist $h_1 = h_2$ μ-fast sicher.

(2) Die Dichte h muss selbst nicht bezüglich μ integrierbar sein. Es gilt $h \in L^1(\mu)$ genau dann, wenn $\nu(X) = \int_X h \, \mathrm{d}\mu < \infty$, also wenn ν ein endliches Maß ist.

(3) Wann ein Maß ν eine Dichte bezüglich eines anderen Maßes μ hat, wird durch den Satz von Radon-Nikodym beantwortet, auf den wir hier nicht eingehen können.

Satz 6.7. Seien μ, ν zwei Maße auf einem messbaren Raum $(X, \mathfrak{A})$ und $h : X \to [0, \infty]$ messbar mit $\mathrm{d}\nu = h \, \mathrm{d}\mu$. Dann gilt für messbares $f \geq 0$

$$\int f \, \mathrm{d}\nu = \int f h \, \mathrm{d}\mu.$$

Für allgemeines messbares f gilt die Äquivalenz

$$f \in L^1(\nu) \Leftrightarrow f h \in L^1(\mu);$$

in diesem Fall erfüllt f auch die obige Gleichheit.

Beweis. Übung. □

6.2. Transformationssatz für lineare Abbildungen

Motivation 6.8. Im Folgenden wollen wir Funktionen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ betrachten. Dabei wollen wir uns überlegen, wann das Bildmaß $T(\lambda^n)$ eine Dichte bezüglich λ^n hat, das heißt unter welchen Voraussetzungen die Gleichheit

$$\lambda^n\big(T^{-1}(A)\big) = T(\lambda^n)(A) = \int_A h \, \mathrm{d}\lambda^n$$

gilt. Notwendige Bedingung dafür ist, dass T Mengen A mit $\lambda^n(A) \neq 0$ nicht auf Nullmengen abbildet, das heißt T sollte also invertierbar und "hinreichend regulär" sein. Im Folgenden werden wir T durch T^{-1} ersetzen, wir betrachten dann $\lambda^n(T(A))$.

Zunächst betrachten wir eine lineare Funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die wir mit Matrizen identifizieren können. In diesem Fall hat $\lambda^n \circ T$ konstante Dichte.

Satz 6.9. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare invertierbare Abbildung. Dann gilt

$$\lambda^n\big(T(A)\big) = |\det(T)| \cdot \lambda^n(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n).$$[19]

Insbesondere gilt

$$\operatorname{vol}\Big(T\big([0,1]^n\big)\Big) = |\det(T)|.$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die beiden Maße

$$\mu_1(A) := \lambda^n\big(T(A)\big) \quad \text{und} \quad \mu_2 := |\det(T)|\lambda^n(A)$$

auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ übereinstimmen. Mit dem Eindeutigkeitssatz (Satz 3.5) genügt es, zu zeigen, dass μ_1 und μ_2 auf Quadern übereinstimmen. Wegen der Stetigkeit des Maßes reicht es dabei aus, Quader mit rationalen Seitenlängen zu betrachten. Weiterhin reicht es aus, Quader der Form $[0,c]^n$ zu betrachten, da λ^n translationsinvariant ist und Quader in Würfel zerschnitten werden können. Insgesamt genügt es also, die Gleichheit

$$\lambda^n\big(T[0,c]^n\big) = |\det(T)| \cdot \underbrace{\lambda^n\big([0,c]^n\big)}_{=c^n}$$

zu zeigen. Mit Singulärwertzerlegung gibt es orthogonale Matrizen $U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $\Sigma = (s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $T = V\Sigma U^*$, wobei aufgrund der Invertierbarkeit von T schon $s_i \neq 0$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt. Setze $D := \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $d_i := |s_i| > 0$, dann ist D invertierbar mit $\Sigma^2 = D^2$ und

$$TT^* = V\Sigma\underbrace{U^*U}_{=I_n}\Sigma V^* = V\Sigma^2V^* = VD^2V^*.$$

Weiterhin gilt $T = VDW$ mit $W := D^{-1}V^*T$ und

$$WW^* = D^{-1}V^*TT^*VD^{-1} = D^{-1}V^*VD^2V^*VD^{-1} = I_n,$$

also ist auch W orthogonal. Wegen $|\det(VDW)| = |\det(V)| \cdot |\det(D)| \cdot |\det(W)|$ reicht es, den Satz in den Spezialfällen zu zeigen, in denen T orthogonal oder diagonal mit positiven Diagonaleinträgen ist.

(i) Sei T eine orthogonale Matrix, dann gilt $|\det(T)| = 1$. Man überzeugt sich leicht, dass λ^n invariant unter Drehungen ist. Somit gilt

$$\lambda^n\big(T[0,c]^n\big) = \lambda^n\big([0,c]^n\big) = |\det(T)| \cdot \lambda^n\big([0,c]^n\big).$$

(ii) Sei $T = \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$ eine Diagonalmatrix mit $d_i > 0$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$. Dann gilt $T([0,c]^n) = \prod_{i=1}^n [0, d_i c]$ und

$$\lambda^n\Big(T\big([0,c]^n\big)\Big) = \prod_{i=1}^n \lambda\big([0,d_ic]\big) = \prod_{i=1}^n d_ic = c^n \prod_{i=1}^n d_i = \lambda^n([0,c]^n) \cdot |\det(T)|. \qquad \square$$

[19] Da T invertierbar ist, gilt $\det(T) \neq 0$ und wir können diese Aussage auch mit dem Bildmaß ausdrücken: $T(\lambda^n) = \frac{1}{|\det(T)|}\lambda^n$.

6.3. Transformationssatz für allgemeine Abbildungen

Satz 6.10 (Transformationssatz)**.** Seien $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $T : V \to W$ eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung, so dass $T'(x) = DT(x)$ für alle $x \in V$ invertierbar ist. Dann ist für jede Borelmenge $A \subseteq V$ auch $T(A) \subseteq W$ eine Borelmenge und es gilt

$$\lambda^n\big(T(A)\big) = \int_A \big|\det\big(T'(x)\big)\big| \,\mathrm{d}\lambda^n(x). \tag{1}$$

Somit gilt für jede integrierbare Funktion $f : W \to \mathbb{C}$ auch

$$\int_W f(y)\,\mathrm{d}\lambda^n(y) = \int_V f\big(T(x)\big)\big|\det\big(T'(x)\big)\big|\,\mathrm{d}\lambda^n(x).^{[20]} \tag{2}$$

Beweis. (i) Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit ist T^{-1} stetig differenzierbar und es gilt

$$(T^{-1})'(y) = \big(T'(x)\big)^{-1} \quad \text{für alle} \quad y \in W, \quad \text{wobei} \quad x = T^{-1}(y),$$

also auch

$$\big|\det\big((T^{-1})'(y)\big)\big| = \frac{1}{\big|\det\big((T')(x)\big)\big|}.$$

(ii) Insbesondere ist T^{-1} stetig und somit messbar, für alle $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $A \subseteq V$ gilt also

$$T(A) = (T^{-1})^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n).^{[21]}$$

Wir zeigen zunächst

$$\lambda^n\big(T(A)\big) \le \int_A \big|\det\big(T'(x)\big)\big|\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad A \subseteq V.$$

Wiederum reicht es, die Aussage für Quader A zu zeigen, und zwar für solche, für die $\overline{A} \subseteq V$ gilt. Sei also A ein solcher Quader. Zerlege A in viele kleine Quader Q_i, und wähle in jedem einzelnen Quader Q_i einen Punkt x_i und approximiere T auf Q_i durch eine affine Abbildung ϕ_i gemäß

$$\phi_i(z) = T(x_i) + T'(x_i)(z - x_i).$$

Das Problem, das sich nun stellt, ist die globale Kontrolle der Approximation. Die Abbildung $x \mapsto \|T'(x)^{-1}\|$ ist stetig, nimmt also ihr Supremum auf der kompakten Menge $\overline{A}$ an. Somit gilt $\|T'(x)^{-1}\| \le c$ für alle $x \in \overline{A}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da T stetig differenzierbar ist, ist $\|T'(x)\|$ gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $\overline{A}$, in Abhängigkeit von ε existiert also $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in \overline{A}$ mit $\|x - y\| < \delta$ sowohl

$$\|T'(x) - T'(y)\| \le \frac{\varepsilon}{c \cdot n} \quad \text{als auch} \quad \big|\det\big(T'(x)\big) - \det\big(T'(y)\big)\big| \le \varepsilon^{[22]}$$

gilt. Wähle nun die Q_i so klein, dass $\|x - y\| \le \delta$ für alle $x, y \in Q_i$. Betrachte nun $z \in Q_i$, also insbesondere $\|z - x_i\| \le \delta$. Schreibe $T = (T_1, \ldots, T_n)$ mit $T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

[20] Anders ausgedrückt: $\frac{\mathrm{d}T(\lambda^n)}{\mathrm{d}\lambda^n}(x) = \frac{1}{|\det(T'(x))|}$ für alle $x \in V$.

[21] Die Menge $T(A)$ lässt sich schreiben als das Urbild von A unter der messbaren Abbildung T^{-1}.

[22] Da T' stetig ist, ist T' stetig in jedem Matrixeintrag und $\det(T')$ ist ein Polynom in den Matrixeinträgen.

Nach dem Mittelwertsatz für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt es Punkte ξ_k auf der Strecke von x_i nach z, so dass

$$\begin{aligned} T(z) &= \big(T_1(z), T_2(z), \ldots, T_n(z)\big) \\ &= \big(T_1(x_i) + T_1'(\xi_1)(z - x_i), \ldots, T_n(x_i) + T_n'(\xi_n)(z - x_i)\big) \\ &= \underbrace{T(x_i) + T'(x_i)(z - x_i)}_{=\phi_i(z)} + \begin{pmatrix} T_1'(\xi_1) - T_1'(x_i) \\ \vdots \\ T_n'(\xi_n) - T_n'(x_i) \end{pmatrix} (z - x_i) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|T(z) - \phi_i(z)\| &= \left\| \begin{pmatrix} T_1'(\xi_1) - T_1'(x_i) \\ \vdots \\ T_n'(\xi_n) - T_n'(x_i) \end{pmatrix} (z - x_i) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\|T_k'(\xi_k) - T_k'(x_i)\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{cn}} \cdot \underbrace{\|z - x_i\|}_{\leq \delta} \leq n \cdot \frac{\varepsilon}{cn} \cdot \delta = \frac{\varepsilon\delta}{c}. \end{aligned}$$

Wir müssen auch $T(Q_i)$ durch ϕ_i kontrollieren: Da T' laut Voraussetzung an jeder Stelle invertierbar ist, ist auch ϕ_i invertierbar mit

$$\phi_i^{-1}(z) = T'(x_i)^{-1} \cdot \big(z - T(x_i)\big) + x_i.$$

Für $z \in Q_i$ gilt also

$$\begin{aligned} \left\|\phi_i^{-1}\big(T(z)\big) - z\right\| &= \left\|\phi_i^{-1}\big(T(z)\big) - \phi_i^{-1}\big(\phi_i(z)\big)\right\| \\ &= \left\|T'(x_i)^{-1} \cdot \big(T(z) - \phi_i(z)\big)\right\| \\ &\leq \underbrace{\left\|T'(x_i)^{-1}\right\|}_{\leq c} \cdot \underbrace{\left\|T(z) - \phi_i(z)\right\|}_{\leq \frac{\varepsilon\delta}{c}} \leq \varepsilon\delta \end{aligned}$$

und somit

$$\phi_i^{-1}\big(T(z)\big) \in Q_i^{+\varepsilon\delta} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in Q_i : \|y - x\| \leq \varepsilon\delta\}.$$

Für alle $z \in Q_i$ folgt $T(z) \in \phi_i(Q_i^{+\varepsilon\delta})$, also $T(Q_i) \subseteq \phi_i(Q_i^{+\varepsilon\delta})$.

Wir brauchen nun noch eine Abschätzung des Volumens von $Q_i^{+\varepsilon\delta}$ gegen das Volumen von Q_i. Das geht am einfachsten, wenn wir die Norm im $\mathbb{R}^n$ als die ∞-Norm nehmen (also das Maximum der Beträge der Komponenten). Außerdem wählen wir die Q_i als Würfel mit Seitenlänge δ.[23] In dem Fall ist $Q_i^{+\varepsilon\delta}$ dann auch wieder ein Würfel, bei dem gegenüber Q_i jede Seite in beide Richtungen um $\varepsilon\delta$ verlängert wurde, und somit gilt

$$\lambda^n\big(Q_i^{+\varepsilon\delta}\big) = (\delta + 2\varepsilon\delta)^n = (1 + 2\varepsilon)^n \delta^n = (1 + 2\varepsilon)^n \lambda^n(Q_i).$$

[23] Man beachte, dass wir uns dafür wieder auf den Fall rationaler Seitenlängen des Quaders A einschränken müssen, damit wir diesen in Würfel zerschneiden können. Wegen der Stetigkeit des Maßes reicht es aber, sich auf diesen Fall zu beschränken. Weiterhin können wir δ durch eine kleinere rationalen Zahl ersetzen, damit sich A perfekt zerlegen lässt.

Somit können wir nun abschätzen:

$$\begin{aligned}\lambda^n\big(T(Q_i)\big) &\le \lambda^n(\phi_i(Q_i^{+\varepsilon\delta}))\\ &\overset{6.9}{=} \big|\det\big(T'(x_i)\big)\big| \cdot \lambda^n(Q_i^{+\varepsilon\delta})\\ &= \big|\det\big(T'(x_i)\big)\big| \cdot (1+2\varepsilon)^n \cdot \lambda^n(Q_i)\\ &= (1+2\varepsilon)^n \int_{Q_i} \big|\det\big(T'(x_i)\big)\big| \,\mathrm{d}\lambda^n(x)\\ &\le (1+2\varepsilon)^n \int_{Q_i} \Big(\big|\det\big(T'(x)\big)\big| + \varepsilon\Big) \,\mathrm{d}\lambda^n(x)\\ &= (1+2\varepsilon)^n \int_{Q_i} \big|\det\big(T'(x)\big)\big| \,\mathrm{d}\lambda^n(x) + (1+2\varepsilon)^n\varepsilon\lambda^n(Q_i),\end{aligned}$$

also insgesamt

$$\lambda^n\big(T(A)\big) \le (1+2\varepsilon)^n \int_A \big|\det\big(T'(x)\big)\big| \,\mathrm{d}\lambda^n(x) + (1+2\varepsilon)^n\varepsilon\lambda^n(A).$$

Im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ folgt dann die Behauptung.

(iii) Für alle $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $B \subseteq W$ setze $A := T^{-1}(B)$, dann gilt

$$\lambda^n(B) = \lambda^n\big(T(A)\big) \overset{\text{(ii)}}{\le} \int_A \big|\det\big(T'(x)\big)\big| \,\mathrm{d}\lambda^n(x) \overset{6.3}{=} \int_B \underbrace{\Big|\det\Big(T'\big(T^{-1}(y)\big)\Big)\Big|}_{=:h(y)} \,\mathrm{d}T(\lambda^n)(y),$$

also $\mathrm{d}\lambda^n \le h \,\mathrm{d}T(\lambda^n)$. Es folgt

$$\int_W f(y)\,\mathrm{d}\lambda^n(y) \overset{6.7}{\le} \int_W f(y)h(y)\,\mathrm{d}T(\lambda^n) \overset{6.3}{=} \int_V f\big(T(x)\big)\underbrace{\big|\det\big(T'(x)\big)\big|}_{=h(T(x))}\,\mathrm{d}\lambda^n(x).$$

(iv) Anwendung von (iii) auf $T^{-1} : W \to V$ und die messbare Funktion

$$V \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f\big(T(x)\big)\big|\det\big(T'(x)\big)\big|$$

ergibt

$$\begin{aligned}&\int_V f\big(T(x)\big)\big|\det\big(T'(x)\big)\big|\,\mathrm{d}\lambda^n(x)\\ &\overset{\text{(iii)}}{\le} \int_W \underbrace{f\Big(T\big(T^{-1}(y)\big)\Big)}_{=f(y)}\underbrace{\Big|\det\Big(T'\big(T^{-1}(y)\big)\Big)\Big| \cdot \big|\det\big((T^{-1})'(y)\big)\big|}_{=1}\,\mathrm{d}\lambda^n(y)\\ &= \int_W f(y)\,\mathrm{d}\lambda^n(y),\end{aligned}$$

also gilt die Gleichheit in (2).

(v) Die volle Gleichheit in (1) folgt nun als Spezialfall $f = 1_{T(A)}$ aus (2). $\square$

6.4. Polarkoordinaten

Beispiel 6.11 (Polarkoordinaten in der Ebene)**.** Seien

$$V := \{(r,\theta) \mid r \in (0,\infty), \theta \in (0,2\pi)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(r,0) \mid r \in [0,\infty)\}\,,$$

dann erfüllt die Abbildung

$$T : V \to W, \quad (r,\theta) \mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$$

die Voraussetzungen für den Transformationssatz. Die Jacobimatrix der Transformation ist

$$T'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und die Jacobideterminante ist

$$\det\big(T'(r,\theta)\big) = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r.$$

Nach dem Transformationssatz ist jetzt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_W f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

wobei die erste Gleichheit wegen $\lambda^2(W^{\mathsf{c}}) = 0$ gilt.

Man beachte, dass wir hierbei auch wieder Fubini benutzt haben, um die Lebesgue-Integrale im $\mathbb{R}^2$ als iterierte Integrale zu schreiben, also

$$\mathrm{d}\lambda^2(x,y) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\lambda^2(r,\theta) = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Nun benutzen wir den Transformationssatz, um $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ auszurechnen (vergleiche Beispiel 5.12):

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^{\infty}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi,\end{aligned}$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

7. L^p-Räume

Konvention. Im Folgenden sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

7.1. Definition der L^p-Räume

Notation 7.1. (1) Für $p \in (0, \infty)$ definieren wir für eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ die *L^p-Norm*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

und setzen

$$L^p(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty \right\}.$$

(2) Für $p = \infty$ setzen wir

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf \left\{ k \in \mathbb{R} \mid \mu\big(\{x \mid |f(x)| > k\}\big) = 0 \right\},$$

wodurch $\|f\|_\infty = \infty$ gilt, falls kein solches $k \in \mathbb{R}$ existiert. Hierbei steht ess sup für "essentielles Supremum". Weiter setzen wir

$$L^\infty(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_\infty < \infty \}.$$

Bemerkung 7.2. (1) Eine Norm $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V hat folgende Eigenschaften:

(i) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle $f \in V$. (absolute Homogenität)

(ii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ für alle $f, g \in V$. (Dreiecksungleichung)

(iii) Ist $\|f\| = 0$, so folgt $f = 0$. (Definitheit)

Die L^p-"Normen" sind absolut homogen, da

$$\|\alpha f\|_p^p = \int_X |\alpha f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) = |\alpha|^p \int_X |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) = |\alpha|^p \|f\|^p;$$

zur Dreiecksungleichung für $p \geq 1$ siehe Satz 7.3, für $p < 1$ siehe Bemerkung 7.4. Im Allgemeinen sind sie aber nicht definit, denn nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_X |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |f(x)|^p = 0 \quad \text{fast überall} \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \text{fast überall} \end{aligned}$$

Die L^p-Normen auf dem Raum der Funktionen sind nur sogenannte Halbnormen. Um dieses Problem zu beheben, identifizieren wir f und g, falls $f = g$ fast überall gilt. Genauer setzen wir

$$\mathcal{L}^p := \left\{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty \right\}$$

und definieren die Äquivalenzrelation

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad f = g \text{ fast überall.}$$

Dann ist $N := \{f \mid f \text{ messbar und } f = 0 \text{ fast überall}\}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$ und wir setzen $L^p := \mathcal{L}^p/N$ als Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Quotientenabbildung

$$\pi : \mathcal{L}^p \longrightarrow L^p, \quad f \mapsto [f].$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Definitionen

$$[\alpha f] := \alpha[f], \quad [f+g] := [f] + [g] \quad \text{und} \quad \|[f]\|_p := \|f\|_p$$

für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f, g \in \mathcal{L}^p$ nicht vom gewählten Repräsentanten abhängen. Damit wird L^p zum normierten Vektorraum. Üblicherweise ignoriert man dann die Unterscheidung zwischen $\mathcal{L}^p$ und L^p und redet von Funktionen in L^p, wobei diese auf Nullmengen beliebig abgeändert werden dürfen.

(2) Die Definition von $\|\cdot\|_p$ für $p = \infty$ ist konsistent im folgenden Sinne: Es gilt

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p \quad \text{für alle} \quad f \in \bigcap_{p\in[1,\infty]} L^p.$$

(3) Verallgemeinert man die p-Normen von $\mathbb{C}^n$ auf den Raum $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen in $\mathbb{C}$, so betrachtet man häufig die Räume

$$\ell_p := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Laut Übung sind alle solchen Funktionen messbar und für das Zählmaß μ auf $\mathbb{N}$ gilt

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

also $L^p(\mu) = \ell_p$.

7.2. Minkowski- und Hölder-Ungleichung

Satz 7.3 (Minkowski-Ungleichung)**.** Seien $p \in [1, \infty]$ und $f, g \in L^p(\mu)$. Dann ist auch $f + g \in L^p(\mu)$ und es gilt

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis. Die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ sind trivial, im Folgenden betrachten wir also $p \in (1, \infty)$. Zur Übersichtlichkeit setzen wir $\|\cdot\| := \|\cdot\|_p$. Für $\|f\| = 0$ beziehungsweise $\|g\| = 0$ ist nichts zu zeigen, sei im Folgenden also $\|f\| \neq 0$ und $\|g\| \neq 0$. Dann folgt die

Dreiecksungleichung mit der Monotonie der p-ten Wurzelfunktion aus

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p &= \int_X |f(x)+g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \int_X \big(|f(x)|+|g(x)|\big)^p \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X \left(\frac{\|f\|}{\|f\|+\|g\|}\cdot\frac{|f(x)|}{\|f\|}+\frac{\|g\|}{\|f\|+\|g\|}\frac{|g(x)|}{\|g\|}\right)^p \big(\|f\|+\|g\|\big)^p \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\overset{(\star)}{\leq} \int_X \big(\|f\|+\|g\|\big)^p \left(\frac{\|f\|}{\|f\|+\|g\|}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|}\right)^p+\frac{\|g\|}{\|f\|+\|g\|}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|}\right)^p\right) \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \big(\|f\|+\|g\|\big)^p\left(\frac{\|f\|}{\|f\|+\|g\|}\underbrace{\frac{\int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)}{\|f\|^p}}_{=1}+\frac{\|g\|}{\|f\|+\|g\|}\underbrace{\frac{\int_X |g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)}{\|g\|^p}}_{=1}\right) \\
&= (\|f\|+\|g\|)^p,
\end{aligned}$$

wobei an der Stelle $(\star)$ eingeht, dass $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty),\ t \mapsto t^p$ konvex ist: Sind $\alpha, \beta \in [0,1]$ mit $\alpha+\beta=1$, so gilt

$$\varphi(\alpha x+\beta y) \leq \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y) \quad \text{für alle} \quad x,y \in [0,\infty). \qquad \square$$

Bemerkung 7.4. Sei $p \in (0,1)$. In diesem Fall ist $t \mapsto t^p$ konkav auf $[0,\infty)$ und dann gilt

$$\big\||f|+|g|\big\|_p \geq \|f\|_p+\|g\|_p,$$

also ist $\|\cdot\|_p$ keine Norm. Man kann zeigen, dass

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p^p+\|g\|_p^p,$$

also ist L^p ein Vektorraum und

$$d(f,g) := \|f-g\|_p^p = \int_X |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu$$

liefert eine Metrik auf L^p.

Definition 7.5. Seien $p,q \in [1,\infty]$. Falls

$$1 = \frac{1}{p}+\frac{1}{q},$$

so nennen wir p und q *konjugierte Exponenten*. Wir schließen dabei explizit auch den Fall $p=1$ und $q=\infty$ ein.

Bemerkung 7.6. (1) Der Fall $p=q=2$ ist ein interessanter Spezialfall.

(2) Seien p,q konjugierte Exponenten und $a,b \geq 0$. Dann gilt

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

Für $a=0$ oder $b=0$ ist nichts zu zeigen, schreibe sonst $a=\exp(\frac{s}{p})$ und $b=\exp(\frac{t}{q})$. Mit der Konvexität der Exponentialfunktion folgt

$$ab = \exp\left(\frac{1}{p}s+\frac{1}{q}t\right) \leq \frac{1}{p}\exp(s)+\frac{1}{q}\exp(t) = \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

Satz 7.7 (Hölder-Ungleichung)**.** Seien p, q konjugierte Exponenten. Für alle $f \in L^p(\mu)$ und alle $g \in L^q(\mu)$ gilt $fg \in L^1(\mu)$ und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Beweis. Im Fall $p = 1$ und $q = \infty$ haben wir $|g| \leq \|g\|_\infty$ fast überall und damit

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X |f| \cdot \|g\|_\infty \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Seien nun $p, q \in (1, \infty)$. Für $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$ ist die Aussage trivialerweise erfüllt, seien also im Folgenden $\|f\|_p \neq 0$ und $\|g\|_q \neq 0$. Setze

$$\hat{f}(t) := \frac{f(t)}{\|f\|_p} \quad \text{und} \quad \hat{g}(t) := \frac{g(t)}{\|g\|_q},$$

dann gilt $\|\hat{f}\|_p = 1 = \|\hat{g}\|_q$ und

$$\|fg\|_1 = \int_X |f(x)||g(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_p \|g\|_q \int_X |\hat{f}(x)||\hat{g}(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_p \|g\|_q \|\hat{f}\hat{g}\|_1,$$

es reicht also zu zeigen, dass $\|\hat{f}\hat{g}\|_1 \leq 1$. Mit der Ungleichung aus Bemerkung 7.6 folgt

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\hat{g}\|_1 &= \int_X |\hat{f}(t)| \cdot |\hat{g}(t)| \,\mathrm{d}\mu(t) \\
&\leq \int_X \left(\frac{1}{p} |\hat{f}(t)|^p + \frac{1}{q} |\hat{g}(t)|^q \right) \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \frac{1}{p} \int_X |\hat{f}(t)|^p \,\mathrm{d}\mu(t) + \frac{1}{q} \int_X |\hat{g}(t)|^q \,\mathrm{d}\mu(t) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.8. (1) Der Fall $p = q = 2$, also

$$\int_X |f| \cdot |g| \,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für den Hilbertraum $L^2(\mu)$.

(2) Auch für die ℓ_p-Räume gilt gemäß Bemerkung 7.2(3) somit die Hölder-Ungleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

7.3. Vollständigkeit der L^p-Räume

Satz 7.9 (Fischer-Riesz)**.** Für alle $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(\mu)$ vollständig, also ein Banachraum.

Beweis. Wir betrachten hier nur den Fall $p < \infty$, der Fall $p = \infty$ ist einfacher. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\mu)$. Dann gibt es für alle $i \in \mathbb{N}$ ein $n(i) \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-i}$ für alle $m, n \geq n(i)$ gilt. OBdA können wir die $n(i)$ aufsteigend wählen, also $n(1) < n(2) < \ldots$, dann gilt

$$\left\|f_{n(i+1)} - f_{n(i)}\right\|_p < 2^{-i} \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Wir wollen den Grenzwert f der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren durch

$$f(x) := f_{n(1)}(x) + \sum_{i=1}^{\infty}\big(f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x)\big). \tag{3}$$

Um zu sehen, dass das Sinn ergibt, setzen wir

$$g_k(x) := \sum_{i=1}^{k}\big|f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x)\big| \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{i=1}^{\infty}\big|f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x)\big|,$$

also $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ für alle $x \in X$. Die Minkowski-Ungleichung (Satz 7.3) liefert

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{k}\left\|f_{n(i+1)} - f_{n(i)}\right\|_p < \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} < 1 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Lemma von Fatou (Lemma 1.26) folgt

$$\begin{aligned}\|g\|_p^p = \int_X |g(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_X \lim_{k\to\infty} |g_k(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\overset{1.26}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \int_X |g_k(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) = \liminf_{k\to\infty} \underbrace{\|g_k\|_p^p}_{<1} \leq 1.\end{aligned}$$

Somit gilt $g < \infty$ fast überall und f ist durch (3) fast überall definiert, setze $f(x) := 0$ auf der verbleibenden Nullmenge. Wegen

$$f_{n(k)}(x) = f_{n(1)}(x) + \sum_{i=1}^{k-1}\big(f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x)\big) \xrightarrow{k\to\infty} f(x) \quad \text{fast überall}$$

gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_{n(k)}(x) = f(x) \quad \text{fast überall.}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $f \in L^p(\mu)$ und $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$. Fixiere ein $m \geq N(\varepsilon)$, wähle $n = n(i)$ für hinreichend großes i und beachte, dass

$$f_{n(i)} - f_m \to f - f_m \quad \text{für } i \to \infty \text{ punktweise fast überall.}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\|f - f_m\|_p^p &= \int_X |f(x) - f_m(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X \lim_{i\to\infty}\big|f_{n(i)}(x) - f_m(x)\big|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\overset{1.26}{\leq} \liminf_{i\to\infty} \int_X \big|f_{n(i)}(x) - f_m(x)\big|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \liminf_{i\to\infty}\big\|f_{n(i)} - f_m\big\|_p^p\\ &\leq \varepsilon^p,\end{aligned}$$

also
$$\|f - f_m\|_p \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad m \geq N(\varepsilon).$$
Es gilt
$$\|f\|_p = \|f_m + (f - f_m)\|_p \leq \|f_m\|_p + \|f - f_m\|_p < \infty,$$
also $f \in L^p(\mu)$. Wegen $\|f - f_m\|_p \leq \varepsilon$ für hinreichend großes m folgt abschließend auch $\|f - f_m\|_p \xrightarrow{m\to\infty} 0$. □

Im Beweis des Satzes von Fischer-Riesz haben wir außerdem gezeigt (zumindest für $p < \infty$):

Satz 7.10. Sei $p \in [1, \infty]$ und es konvergiere $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $L^p(\mu)$ bezüglich $\|\cdot\|_p$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n(i)})_{i\in\mathbb{N}}$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert.

Bemerkung 7.11. Ohne Übergang zu einer Teilfolge ist Satz 7.10 im Allgemeinen falsch.

Korollar 7.12. Der Banachraum $L^2(\mu)$ ist ein Hilbertraum bezüglich des Skalarprodukts
$$\langle f, g\rangle := \int_X f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Teil II. Vektoranalysis

8. Die klassischen Sätze von Gauß und Stokes

Motivation 8.1. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

für stetig differenzierbares $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob es höherdimensionale Analoga davon gibt. Es wird sich zeigen, dass es solche Analoga gibt, falls wir den Hauptsatz korrekt interpretieren: Schreibe $I = [a, b]$, nenne $\partial I = \{a, b\}$ den Rand von I. Dann ist

$$F(b) - F(a) = \int_{\partial I} F,$$

wobei die Vorzeichen der Orientierung des Randes entsprechen. Der Hauptsatz besagt dann

$$\int_I F' = \int_I \partial F = \int_{\partial I} F,$$

also: Das Integral über ein "Gebiet" der Ableitung einer Funktion ist das gleiche wie das Integral über den Rand des Gebietes der Funktion. Dies gilt auch im Höherdimensionalen, aber ∂ muss richtig interpretiert werden.

Beispiel 8.2 (Satz von Gauß)**.** Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F = (F_1, \ldots, F_n)$ für $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Vektorfeld. Betrachte die *Divergenz* von F:

$$\operatorname{div}(F) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

dann ist $\operatorname{div}(F) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Was ist

$$\int_M \operatorname{div}(F)\,\mathrm{d}V := \int_M \operatorname{div}(F)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

über eine "n-dimensionale" Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$? Betrachte den Spezialfall $n = 2$, weiter sei $M = Q$ ein Rechteck mit $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\iint_Q \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_{a_2}^{b_2} \underbrace{F_1(b_1, x_2)}_{=\langle F, e_1\rangle(b_1, x_2)} \overbrace{-F_1(a_1, x_2)}^{=\langle F, -e_1\rangle(a_1, x_2)}\,\mathrm{d}x_2 = \int_{\substack{\text{Vertikaler}\\ \text{Rand von } Q}} \langle F, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}x_2,$$

wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor auf dem Rand sein soll, und analog

$$\iint_Q \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\underbrace{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2}_{\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1} = \int_{a_1}^{b_1} \underbrace{F_2(x_1, b_2)}_{=\langle F, e_2\rangle(x_1, b_2)} \overbrace{-F_2(x_1, a_2)}^{=\langle F, -e_2\rangle(x_1, a_2)}\,\mathrm{d}x_1 = \int_{\substack{\text{Horizontaler}\\ \text{Rand von } Q}} \langle F, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}x_1.$$

Insgesamt gilt also

$$\iint_Q \operatorname{div}(F)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial Q} \langle F, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}S,$$

das Integral links ist ein Volumenintegral, das Integral rechts ist ein Oberflächenintegral, und $\vec{n}$ ist das Normalenvektorfeld auf dem Rand ∂Q.

Dies gilt auch für allgemeinere M und beliebige $n \geq 1$.

Satz (Gauß)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ "hinreichend schön" und $F : M \to \mathbb{R}^n$ "hinreichend glatt". Dann gilt

$$\int_M \operatorname{div}(F)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial M} \langle F, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}S.$$

Das Integral links ist das Volumenintegral bezüglich des n-dimensionalen Lebesgue-Maßes, das Integral rechts ist das Oberflächenintegral bezüglich des $(n-1)$-dimensionalen induzierten Lebesgue-Maßes auf ∂M.

Beispiel 8.3. (1) Sei $F(x) = x$, also $F_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ und somit

$$\operatorname{div}(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n.$$

Dann sagt der Satz von Gauß

$$\int_M n\,\mathrm{d}V = \int_{\partial M} \langle x, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}S,$$

also

$$n\lambda^n(M) = \int_M n\,\mathrm{d}V = \int_{\partial M} \langle x, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}S.$$

(2) Betrachte $M = \overline{B(0,r)}$, dann ist $\partial M = \mathbb{S}^{n-1}$ die Kugeloberfläche. Da x und $\vec{n}$ parallel sind, gilt $\langle x, \vec{n}\rangle = \|x\|\|\vec{n}\| = r$. Damit ist

$$\int_{\partial M} \langle x, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}S = r \cdot \lambda^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

In diesem Spezialfall liefert der Gauß'sche Integralsatz also die Beziehung

$$\lambda^n\big(\overline{B(0,r)}\big) = \frac{r}{n} \cdot \lambda^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

n	$\lambda^n\big(\overline{B(0,r)}\big)$	$\frac{r}{n} \cdot \lambda^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$
1	$2r$	$\frac{r}{1} \cdot 2$
2	πr^2	$\frac{r}{2} \cdot 2\pi r$
3	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{r}{3} \cdot 4\pi r^2$

Beispiel 8.4 (Physikalische Interpretation vom Gauß'schen Integralsatz)**.**

(1) Sei F ein stationäres (also zeitunabhängiges) Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit. Die Divergenz von F entspricht Quellen beziehungsweise Senken des Feldes, also Orten an denen Teilchen erzeugt oder vernichtet werden. Dann bedeutet

$$\int_M \operatorname{div}(F)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial M} \langle F, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}S,$$

dass die Gesamtmenge von erzeugten- und vernichteten Teilchen (links) dem Fluss durch den Rand von M (in Normalenrichtung) entspricht (rechts).

(2) In der Elektrostatik sei F ein elektrisches Feld E. Nach der Maxwellgleichung gilt $\operatorname{div}(E) = \rho$, wobei ρ die Ladungsdichte sein soll. Dann bedeutet

$$\int_M \operatorname{div}(E)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial M} \langle E, \vec{n}\rangle\,\mathrm{d}S,$$

dass die Gesamtladung in M (links) dem Fluss des elektrischen Felds durch den Rand von M (in Normalenrichtung) entspricht.

Beispiel 8.5 (Satz von Stokes)**.** Für $n = 3$ gibt es für ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F = (F_1, F_2, F_3)$ eine weitere wichtige Ableitungsoperation, nämlich die *Rotation*[24]

$$\operatorname{rot}(F) := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right).$$

Die Rotation $\operatorname{rot}(F) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist auch ein Vektorfeld.[25] Es gibt eine interessante Umformulierung von $\int_M \operatorname{rot}(F)\,\mathrm{d}V$, aber nur, wenn über ein zweidimensionales M integriert wird. Sei nun wieder $M = Q$ ein Rechteck eingebettet in die x_1-x_2-Ebene in $\mathbb{R}^3$. Ist S der Normalenvektor auf Q, also in x_3-Richtung, und τ der Einheitstangentenvektor vom Rand, so gilt

$$\begin{aligned}
\int_Q \langle \operatorname{rot}(F),\, \mathrm{d}S\rangle &= \iint \big(\operatorname{rot}(F)\big)_3\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= \iint \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= \int \big(F_2(b_1, x_2) - F_2(a_1, x_2)\big)\,\mathrm{d}x_2 - \int \big(F_1(x_1, b_2) - F_1(x_1, a_2)\big)\,\mathrm{d}x_1\\
&= \int_{\partial Q} \langle F, \tau\rangle\,\mathrm{d}S,
\end{aligned}$$

da die Integrale in der vorletzten Zeile über den Rand von Q in Tangentialrichtung vom Rand gehen. Dies gilt nun wieder für allgemeineres M, aber trotzdem nur für $n = 3$.

Satz (Klassischer Satz von Stokes)**.** Sei $n = 3$, $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine "hinreichend schöne" zweidimensionale Fläche und $F : V \to \mathbb{R}$ "hinreichend glatt", wobei V offen und $V \supseteq M$. Dann gilt

$$\int_M \langle \operatorname{rot}(F),\, \mathrm{d}S\rangle = \int_{\partial M} \langle F, \tau\rangle\,\mathrm{d}s,$$

wobei das Integral links das Oberflächenintegral über die Fläche M senkrecht zur Fläche M und das Integral rechts das Kurvenintegral über die zur Randkurve tangentialen Kurve sein soll.

Beispiel 8.6. Sei $M = \overline{B(0,1)}$ in der x_1-x_2-Ebene mit Kreisrand $\partial M = \mathbb{S}^1$.

(1) Sei $F(x) = x$, also $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ für alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $\operatorname{rot}(F) = 0$, also $\int_M \langle \operatorname{rot}(F),\, \mathrm{d}S\rangle = 0$. Weiter ist F senkrecht auf der Kreislinie, also ist $\langle F, \tau\rangle = 0$ und $\int_{\partial M} \langle F, \tau\rangle\,\mathrm{d}S = 0$.

[24] Englisch: *curl*.

[25] Dies funktioniert nur für $n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, also gerade für $n = 3$.

(2) Sei $F(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2, 2x_1x_2 + x_1, x_3)$. Der Tangentialvektor τ am Kreis zu (x_1,x_2) ist $(-x_2,x_1)$, also ist

$$\langle F,\tau\rangle = \big\langle (x_1^2, 2x_1x_2 + x_1, x_3), (-x_2,x_1,0)\big\rangle = -x_1^2x_2 + 2x_1^2x_2 + x_1^2 = x_1^2x_2 + x_1^2.$$

Die Integration von $\mathrm{d}S$ über $\mathbb{S}^1$ berechnen wir in Polarkoordinaten $x_1 = \sin(\varphi)$ und $x_2 = \cos(\varphi)$. Dann gilt

$$\int_{\partial M} \langle F,\tau\rangle \,\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \big(\sin^2(\varphi)\cos(\varphi) + \sin^2(\varphi)\big)\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \pi.$$

Für das zweite Integral brauchen wir

$$\big(\mathrm{rot}(F)\big)_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 2x_2 + 1 - 0 = 2x_2 + 1,$$

also gilt

$$\int_M \langle \mathrm{rot}(F),\, \mathrm{d}S\rangle = \int_{\overline{B(0,1)}} (2x_2+1)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_{\overline{B(0,1)}} 1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \pi.$$

(3) Die Maxwell-Gleichungen beschreiben den Zusammenhang der elektrischen Feldstärke E und der magnetischen Flussdichte B. Unter anderem gilt $\mathrm{rot}(E) = -\frac{\partial B}{\partial t}$, es folgt das Induktionsgesetz

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M \langle B,\, \mathrm{d}S\rangle = \int_M \langle \mathrm{rot}(E),\, \mathrm{d}S\rangle = \int_{\partial M} \langle E,\tau\rangle\,\mathrm{d}S.$$

Die linke Seite beschreibt die Änderungen des Flusses des Magnetfelds durch S, die rechte Seite das elektrische Feld entlang des Randes von S und damit den induzierten Stromfluss.

Bemerkung 8.7. Das Vorangegangene führt auf diverse Fragen. Manche davon sind technischer Natur:

- Welche Mengen und Flächen kommen als Integrationsbereiche in Frage?
- Was ist der Rand ∂M einer solchen Fläche M?
- Wie können wir die Vorzeichen (die "Orientierung") von Normalen und Tangenten zu Flächen konsistent festlegen?
- Wie ist die Integration über M und ∂M definiert?

Andere sind konzeptioneller Natur:

- Wie kann man den Satz von Stokes verallgemeinern auf Dimensionen $n > 3$?
- Sind die Sätze von Stokes und Gauß vielleicht nur Spezialfälle eines allgemeineren Satzes?

Die Beantwortung dieser Fragen wird auf den allgemeinen Satz von Stokes führen. Die Formulierung davon benötigt allerdings das Konzept von *Differentialformen.*

9. Differentialformen vom Grad 1 und Vektorfelder

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Ableitung $\mathrm{d}f(x)$ von f an einer Stelle $x \in U$ (die wir in der Analysis II mit $Df(x)$ bezeichnet haben) ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die f in der Nähe von x am besten approximiert, also $\mathrm{d}f(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Man nennt $(\mathbb{R}^n)^* := L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ auch den *Dualraum* von $\mathbb{R}^n$.[26]

Definition 9.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine *Differentialform vom Grad* 1 (oder *Pfaff'sche Form*) ist eine Abbildung von U in den Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$ von $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung 9.2. Seien $x_1, \dots, x_n$ die Koordinatenfunktionen auf U, das heißt

$$x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto z_i,$$

dann sind die $\mathrm{d}x_i = e_i$ die kanonischen Basisvektoren in $(\mathbb{R}^n)^*$, denn: Sei e_j der j-te kanonische Basisvektor von $\mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\mathrm{d}x_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Proposition 9.3. Für jede Differentialform ω vom Grad 1 auf U existieren eindeutig bestimmte Funktionen $p_1, \dots, p_n : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, \mathrm{d}x_i \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

Definition 9.4. Eine Differentialform ω vom Grad 1 auf U heißt *messbar*/*stetig*/*differenzierbar*, wenn $p_1, \dots, p_n$ messbar/stetig/differenzierbar sind. Die Differentialform ω hat *kompakten Träger*, wenn $p_1, \dots, p_n$ kompakten Träger haben.

Definition 9.5. Seien ω, ω' Differentialformen vom Grad 1 auf U und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so definieren wir $\omega + \omega'$ und $f\omega$ durch

$$(\omega + \omega')(x) := \omega(x) + \omega'(x) \quad \text{und} \quad (f\omega)(x) := f(x)\omega(x) \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

Definition 9.6. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein *Vektorfeld* auf U ist eine Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^n$.

Definition 9.7. Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Für jedes Vektorfeld v auf U existieren eindeutig bestimmte Funktionen $q_i : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i(x) e_i \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

Das Vektorfeld v heißt *messbar*/*stetig*/*differenzierbar*, falls $q_1, \dots, q_n$ messbar/stetig/differenzierbar sind. Vektorfelder können addiert und mit Funktionen multipliziert werden. Für $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ und $w \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $\langle \alpha, w \rangle := \alpha(w)$.[27] Ist ω eine Differentialform vom Grad 1 und v ein Vektorfeld, so liefert das Skalarprodukt $\langle \omega, v \rangle = \omega(v)$ eine Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$.

[26] Da $\mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, ist jede lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eindeutig durch die Bilder der Standardbasisvektoren $e_1, \dots, e_n$ festgelegt, also können wir g mit $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ und somit $(\mathbb{R}^n)^*$ mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren.

[27] Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren und die dazu entsprechende lineare Abbildung als Zeilenvektor.

10. Differentialformen höherer Ordnung

Definition 10.1. Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine *Multilinearform vom Grad* p (kurz: p*-Linearform*) ist eine Abbildung $\alpha : \bigtimes_{i=1}^p E \to \mathbb{R}$, die linear in jeder ihrer p Variablen ist. Eine p-Linearform α heißt *alternierend* (oder *antisymmetrisch*), falls

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p)$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, p\}$ mit $i \neq j$. Die Menge aller alternierenden p-Linearformen auf E bezeichnen wir mit $\bigwedge^p E^*$.

Bemerkung 10.2. Für jede alternierende p-Linearform α und jede Permutation π von $\{1, \dots, p\}$ gilt

$$\alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) = \operatorname{sgn}(\pi)\alpha(v_1, \dots, v_p),$$

wobei sgn das *Signum* einer Permutation bezeichnet, d.h.

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1, & \pi \text{ ist Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen,} \\ -1, & \pi \text{ ist Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen.} \end{cases}$$

Satz 10.3. Sei α eine beliebige p-Linearform auf E. Setze

$$\beta(v_1, \dots, v_p) := \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}),$$

wobei S_p die Menge der Permutationen von $\{1, \dots, p\}$ bezeichne. Dann gelten:

(1) β ist alternierend.

(2) Falls α alternierend ist, so ist $\beta = p!\alpha$.

Beweis. (1) Sei $\pi \in \mathrm{S}_p$. Wegen $\operatorname{sgn}(\sigma\pi) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\pi)$ gilt

$$\begin{aligned} \beta(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma\pi(1)}, \dots, v_{\sigma\pi(p)}) \\ &= \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{\sigma\pi \in \mathrm{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma\pi)\alpha(v_{\sigma\pi(1)}, \dots, v_{\sigma\pi(p)}) \\ &= \operatorname{sgn}(\pi)\beta(v_1, \dots, v_p), \end{aligned}$$

also ist β alternierend.

(2) Ist α alternierend, so gilt wegen $|\mathrm{S}_p| = p!$ schon

$$\begin{aligned} \beta(v_1, \dots, v_p) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)^2\alpha(v_1, \dots, v_p) \\ &= p!\alpha(v_1, \dots, v_p). \end{aligned}$$

□

Definition 10.4. Sei α eine p-Linearform auf E und β eine q-Linearform auf E.

(1) Es ist $\alpha \otimes \beta$ eine $(p+q)$-Linearform auf E, wobei

$$(\alpha \otimes \beta)(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) := \alpha(v_1, \dots, v_p)\beta(w_1, \dots, w_q).$$

(2) Sind α und β alternierend, so wird ihr *äußeres Produkt* $\alpha \wedge \beta$ definiert durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{p+q}) := \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi)\alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)})\beta(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}).$$

Beispiel 10.5. Seien $e_1^* = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2^* = (0, 1, 0, \dots, 0) \in (\mathbb{R}^n)^*$. Dann ist

$$e_1^* \wedge e_2^* = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*.$$

Satz 10.6. (1) Seien α und β alternierende Multilinearformen, dann ist auch $\alpha \wedge \beta$ alternierend.

(2) Es gelten:

(a) Für alle alternierenden p-Linearformen α und α' sowie alle alternierenden q-Linearformen β und β' gelten die Distributivgesetze

$$(\alpha + \alpha') \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + \alpha' \wedge \beta \quad \text{und} \quad \alpha \wedge (\beta + \beta') = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \beta'.$$

(b) Das äußere Produkt ist assoziativ, das heißt für alle alternierenden Multilinearformen α, β und γ gilt

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

(c) Ist α eine alternierende p-Linearform und β eine alternierende q-Linearform, dann gilt

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta.$$

Beweis. (1) Folgt aus Satz 10.3.

(2) (a) Folgt aus der Bilinearität der Formel in der Definition des äußeren Produkts.

(b) Seien α eine p-Linearform, β eine q-Linearform und γ eine r-Linearform. Dann ist $\alpha \wedge \beta$ eine $(p+q)$-Linearform und es gilt

$$\begin{aligned}
&\big((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma\big)(v_1, \dots, v_{p+q+r}) \\
&= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\pi)(\alpha \wedge \beta)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p+q)})\gamma(v_{\pi(p+q+1)}, \dots, v_{\pi(p+q+r)}) \\
&= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\pi)\gamma(v_{\pi(p+q+1)}, \dots, v_{\pi(p+q+r)}) \\
&\qquad \cdot \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\pi\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma\pi(p)})\beta(v_{\sigma\pi(p+1)}, \dots, v_{\sigma\pi(p+q)}).
\end{aligned}$$

Setze jetzt

$$\tau(i) := \begin{cases} \sigma\pi(i), & \text{falls } \pi(i) \leq p+q, \\ \pi(i), & \text{falls } \pi(i) > p+q, \end{cases}$$

dann ist $\tau \in \mathrm{S}_{p+q+r}$ mit $\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\sigma)$ und

$$\sum_{\pi \in \mathrm{S}_{p+q+r}} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{p+q}} \ldots = (p+q)! \sum_{\tau \in \mathrm{S}_{p+q+r}} \ldots .$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(v_1, \ldots, v_{p+q+r}) = \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\tau \in \mathrm{S}_{p+q+r}} &\operatorname{sgn}(\tau)\alpha(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(p)}) \\ &\cdot \beta(v_{\tau(p+1)}, \ldots, v_{\tau(p+q)}) \\ &\cdot \gamma(v_{\tau(p+q+1)}, \ldots, v_{\tau(p+q+r)}).\end{aligned}$$

Durch eine analoge Rechnung erhält man den gleichen Ausdruck für

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)(v_1, \ldots, v_{p+q+r}).$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}(\beta \wedge \alpha)(v_1, \ldots, v_{q+p}) &= (\alpha \wedge \beta)(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p+q)}) \\ &= (-1)^{pq}(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_{p+q})\end{aligned}$$

mit der Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & p & p+1 & \ldots & p+q \\ q+1 & \ldots & q+p & 1 & \ldots & p \end{pmatrix},$$

die als Produkt von $p \cdot q$ Transpositionen geschrieben werden kann und somit $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{pq}$ erfüllt. □

Bemerkung 10.7. Wie im Beweis zu Satz 10.6(2)(b) zeigt man: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ alternierende Multilinearformen, wobei α_i vom Grad p_i ist, so gilt mit $p := \sum_{i=1}^m p_i$

$$\begin{aligned}&\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m(v_1, \ldots, v_p) \\ &\quad = \frac{1}{p_1! \cdot \ldots \cdot p_m!} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_p} \operatorname{sgn}(\pi)\alpha_1(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(p_1)}) \cdots \alpha_m(v_{\pi(p-p_m+1)}, \ldots, v_{\pi(p)}).\end{aligned}$$

Satz 10.8. Seien E ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann gelten:

(1) Der Raum der alternierenden p-Linearformen über E ist ein Vektorraum der Dimension $\binom{n}{p}$.

(2) Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von E und $e_1^*, \ldots, e_n^*$ die zugehörige duale Basis von E^*.[28] Dann bildet
$$\left\{e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^* \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n\right\}$$
eine Basis der alternierenden p-Linearformen über E.

[28] Es gilt also $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$.

Beweis. Für alle $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leq n$ gilt

$$(e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = \begin{cases} 1, & i_k = j_k \text{ für alle } k, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also sind $e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*$ linear unabhängig.

Sei nun α eine alternierende p-Linearform, dann ist α eindeutig bestimmt durch die Werte $\alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ für beliebige $1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n$. Falls $i_k = i_\ell = i$ für $k \neq \ell$, so ist

$$\alpha(e_{i_1}, \ldots, e_i, \ldots, e_i, \ldots, e_{i_p}) = -\alpha(e_{i_1}, \ldots, e_i, \ldots, e_i, \ldots, e_{i_p}),$$

und somit ist $\alpha(e_{i_1}, \ldots, e_i, \ldots, e_i, \ldots, e_{i_p}) = 0$. Aus diesem Grund brauchen wir nur die Werte $\alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ auf Basisvektoren mit paarweise verschiedenen Indizes. Durch Vertauschen von Argumenten kann solch ein Wert aber durch einen Wert ausgedrückt werden, für den $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ gilt, also reicht es, $\alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ im Fall $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ zu kennen. Dann gilt aber

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*. \qquad \square$$

Definition 10.9. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine *Differentialform vom Grad p* (oder *p-Differentialform* oder nur p-Form) auf U ist eine Abbildung

$$\omega : U \to \{\text{alternierende } p\text{-Linearformen auf } \mathbb{R}^n\}.$$

Die Menge aller p-Formen auf U bezeichnen wir mit $\Omega^p(U)$.

Bemerkung 10.10. Die Differentialformen vom Grad p können punktweise addiert und mit reellen Funktionen multipliziert werden. (Vergleiche Definition 9.5 für $p = 1$.)

Definition 10.11. Seien ω_1 und ω_2 Differentialformen vom Grad p_1 beziehungsweise p_2 auf U. Das *äußere Produkt* $\omega_1 \wedge \omega_2$ (oder $\omega_1\omega_2$) ist definiert durch

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(x) := \omega_1(x) \wedge \omega_2(x) \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

Bemerkung 10.12. (1) Sind ω_1 und ω_2 Differentialformen vom Grad p_1 beziehungsweise p_2, dann ist $\omega_1 \wedge \omega_2$ eine $(p_1 + p_2)$-Differentialform.

(2) Sind ω_1, ω_1' p_1-Differentialformen, ω_2, ω_2' p_2-Differentialformen, ω_3 eine p_3-Differentialform und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so gelten folgende Rechenregeln:
   - (i) $(\omega_1 + \omega_1')\omega_2 = \omega_1\omega_2 + \omega_1'\omega_2$.
   - (ii) $\omega_1(\omega_2 + \omega_2') = \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_2'$.
   - (iii) $(f\omega_1)\omega_2 = \omega_1(f\omega_2) = f \cdot (\omega_1\omega_2)$.
   - (iv) $(\omega_1\omega_2)\omega_3 = \omega_1(\omega_2\omega_3)$.
   - (v) $\omega_2\omega_1 = (-1)^{p_1p_2}\omega_1\omega_2$.

Notation 10.13. Gemäß Bemerkung 9.2 schreiben wir für die kanonische duale Basis $e_1^*, \ldots, e_n^*$ des $\mathbb{R}^n$ auch $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ und somit für die Basis der alternierenden p-Linearformen aus Satz 10.8 auch $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^* = \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p}$.

Proposition 10.14 (und Definition)**.** Jede Differentialform ω vom Grad p auf U besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} g_{i_1\ldots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_p},$$

wobei $g_{i_1\ldots i_p} : U \to \mathbb{R}$. Die Differentialform ω heißt *messbar/stetig/differenzierbar*, falls alle $g_{i_1\ldots i_p}$ messbar/stetig/differenzierbar sind.

Beispiel 10.15. Seien $n = 3$ und $U = \mathbb{R}^3$. Wir bezeichnen dann

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 = e_1^*, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x_2 = e_2^* \quad \text{und} \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}x_3 = e_3^*.$$

Sei

$$\omega_1(x,y,z) := x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \cos(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

eine 2-Form und

$$\omega_2(x,y,z) := x\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$$

eine 1-Form. Wegen

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

sowie

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z = \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z = 0$$

gilt

$$\begin{aligned}(\omega_1\wedge\omega_2)(x,y,z) &= x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \cos(z)x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + x^2z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\ &\qquad + \cos(z)z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y + x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z + \cos(z)y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z \\ &= \big(x^3 - z\cos(z)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Bemerkung 10.16. (1) Ist ω eine p-Form, so gilt $\omega\omega = (-1)^{p\cdot p}\omega\omega$. Ist p ungerade, so folgt $\omega\wedge\omega = 0$.

(2) Die einzige p-Form für $p > n$ ist 0. Sind ω_1 und ω_2 Differentialformen vom Grad p_1 beziehungsweise p_2 mit $p_1 + p_2 > n$, so gilt $\omega_1\wedge\omega_2 = 0$.

11. Äußere Ableitung von Differentialformen

Motivation 11.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine 0-Form auf U ist eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$.[29] Falls f differenzierbar ist, so ist die Ableitung $\mathrm{d}f = Df : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ eine 1-Form mit Koordinatendarstellung $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$. Wir haben also einen Ableitungsoperator von den 0-Formen in die 1-Formen. Diesen wollen wir jetzt auf beliebige p-Formen ausdehnen.

Definition 11.2. Sei

$$\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} g_{i_1 \ldots i_p} \, \mathrm{d}x_{i_1} \ldots \mathrm{d}x_{i_p}.$$

eine differenzierbare p-Differentialform auf U. Die *äußere Ableitung* $\mathrm{d}\omega$ ist dann gegeben durch

$$\mathrm{d}\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \mathrm{d}g_{i_1 \ldots i_p} \, \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p}.$$

Beispiel 11.3. (1) Seien $n = 2$ und $\omega := f \, \mathrm{d}x + g \, \mathrm{d}y$ für Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \, \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \, \mathrm{d}y &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial x} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial y} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

(2) Seien $n = 3$ und $\omega(x, y, z) := x^2 \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}z$. Dann ist

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(x^2) \, \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = (2x \, \mathrm{d}x + 0 \, \mathrm{d}y + 0 \, \mathrm{d}z) \, \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Bemerkung 11.4. (1) Eine p-Differentialform wird unter der äußeren Ableitung auf eine Differentialform vom Grad $p+1$ abgebildet.

(2) Die äußere Ableitung ist linear: $\mathrm{d}(\omega_1 + \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2$ für alle Differentialformen ω_1 und ω_2 vom gleichen Grad.

Satz 11.5. Seien ω_1 und ω_2 differenzierbare Differentialformen vom Grad p beziehungsweise q. Dann gilt

$$\mathrm{d}(\omega_1 \omega_2) = \mathrm{d}(\omega_1)\omega_2 + (-1)^p \omega_1 \, \mathrm{d}(\omega_2).$$

Beweis. Wegen der Linearität der äußeren Ableitung genügt es, die Behauptung für Differentialformen $\omega_1 = f \, \mathrm{d}x_{i_1} \ldots \mathrm{d}x_{i_p}$ und $\omega_2 = g \, \mathrm{d}x_{j_1} \ldots \mathrm{d}x_{j_q}$ zu zeigen. Laut Analysis II gilt

$$\mathrm{d}(fg) = (\mathrm{d}f)g + f(\mathrm{d}g),$$

also

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \mathrm{d}(f \, \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p} g \, \mathrm{d}x_{j_1} \cdots \mathrm{d}x_{j_q}) \\ &= \mathrm{d}(fg) \, \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p} \, \mathrm{d}x_{j_1} \cdots \mathrm{d}x_{j_q} \\ &= (\mathrm{d}f)g \, \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p} \, \mathrm{d}x_{j_1} \cdots \mathrm{d}x_{j_q} + f \, \mathrm{d}g \, \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p} \, \mathrm{d}x_{j_1} \cdots \mathrm{d}x_{j_q} \\ &= \mathrm{d}(f) \, \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p} g \, \mathrm{d}x_{j_1} \cdots \mathrm{d}x_{j_q} + (-1)^p f \, \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p} \, \mathrm{d}g \, \mathrm{d}x_{j_1} \cdots \mathrm{d}x_{j_q} \\ &= \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2. \end{aligned}$$

□

[29] Eine 0-Linearform auf E ist eine lineare Abbildung $\omega : E^0 \to \mathbb{R}$, wobei $E^0 \cong \mathbb{R}$.

Satz 11.6. Sei ω eine zweimal stetig differenzierbare Differentialform vom Grad p. Dann ist $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

Beweis. Wegen der Linearität der äußeren Ableitung genügt es, Differentialformen ω der Form $\omega = f\,\mathrm{d}x_{i_1}\dots\mathrm{d}x_{i_p}$ für beliebige geordnete Indizes $1 \le i_1 < \dots < i_p \le n$ zu betrachten. Die äußere Ableitung von ω ist in diesem Fall

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f\,\mathrm{d}x_{i_1}\dots\mathrm{d}x_{i_p} = \omega_1\omega_2$$

für die 1-Differentialform $\omega_1 := \mathrm{d}f$ und die p-Differentialform $\omega_2 := \mathrm{d}x_{i_1}\dots\mathrm{d}x_{i_p}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\omega_1\omega_2) &= \mathrm{d}(\omega_1)\omega_2 + (-1)^1\omega_1\,\mathrm{d}(\omega_2)\\
&= \mathrm{d}(\mathrm{d}f)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\dots\mathrm{d}x_{i_p} + (-1)^1\,\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1}\dots\mathrm{d}x_{i_p})\\
&= \mathrm{d}(\mathrm{d}f)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\dots\mathrm{d}x_{i_p},
\end{aligned}$$

da $\mathrm{d}1 = 0$ und somit $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1}\dots\mathrm{d}x_{i_p}) = 0$. Weiterhin gilt $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$ und somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_i\\
&= \sum_{1\le j<i\le n} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\right)}_{=0}\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}x_i = 0
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen aus Analysis II. Es folgt $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$. □

12. Stammfunktionen von Differentialformen

Definition 12.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetige p-Differentialform auf U.

(1) Eine Differentialform α vom Grad $p-1$ auf U heißt *Primitive* oder *Stammfunktion* zu ω, falls $\omega = \mathrm{d}\alpha$. Die Differentialform ω heißt *exakt*, falls sie eine Stammfunktion besitzt.

(2) Die Differentialform ω heißt *geschlossen*, falls $\mathrm{d}\omega = 0$ ist.

Bemerkung 12.2. (1) Ist ω exakt mit Stammfunktion α, so gilt $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$, also ist ω geschlossen. Die Differentialform $\omega = \mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ ist nicht geschlossen, da $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \neq 0$, also auch nicht exakt.

(2) Im Folgenden werden wir uns mit der Frage beschäftigen, unter welchen Bedingungen die Umkehrung gilt, das heißt unter welchen Bedingungen geschlossene Differentialformen auch exakt sind. Wir werden sehen, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt, für hinreichend "schöne" Gebiete U allerdings schon.

Beispiel 12.3. Betrachte auf $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Differentialform vom Grad 1

$$\omega(x, y) := \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die Differentialform ω ist geschlossen, denn

$$\mathrm{d}\omega = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

aber ω ist nicht exakt: Angenommen, es gälte $\omega = \mathrm{d}f$ für $f : U \to \mathbb{R}$, also ω habe die Darstellung

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Für diese Funktion f müsste dann

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

gelten. Betrachte die Abbildung

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f\big(\cos(t), \sin(t)\big).$$

Es ist g stetig und periodisch auf $\mathbb{R}$, also nimmt g in einem $t_0 \in \mathbb{R}$ ihr Maximum an; folglich gilt $g'(t_0) = 0$. Es ist aber

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sin(t)}{\sin^2(t)+\cos^2(t)} \cdot \big(-\sin(t)\big) + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)+\cos^2(t)}\cos(t) = 1$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, also kann es keine solche Funktion f geben.

Definition 12.4. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls es einen Punkt $z \in U$ gibt, so dass für jedes $x \in U$ die direkte Verbindungsstrecke zwischen z und x vollständig in U liegt.[30]

[30]Formal: Für die Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto z + t(x-z)$ gilt $\gamma([0,1]) \subseteq U$.

Jedes konvexe Gebiet ist sternförmig, jedes sternförmige Gebiet ist wegzusammenhängend.[31]

Lemma 12.5 (Poincaré)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Dann ist jede geschlossene Differentialform beliebigen Grades $p \geq 1$ exakt: Ist $\mathrm{d}\omega = 0$, so existiert eine $(p-1)$-Differentialform α mit $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

Beweis. Sei zunächst $p = 1$ und somit

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i \, \mathrm{d}x_i$$

für geeignete $g_i : U \to \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung sei der spezielle Punkt für sternförmiges U der Punkt $z = 0$. Die Beweisidee ist, die Funktion $\hat{\omega}(t, x) := \omega(tx)$ für $t \in [0, 1]$ zu betrachten und diese Funktion entlang der Verbindung von z zu x zu integrieren, also einem Ausdruck der Gestalt

$$\alpha = \int_0^1 \omega(tx)$$

Sinn zu geben. Formal entwickeln wir in Differentialen und berücksichtigen nur Terme, die $\mathrm{d}t$ enthalten:

$$\begin{aligned}\omega(tx) = \sum_{i=1}^{n} g_i(tx) \, \mathrm{d}(tx_i) &= \sum_{i=1}^{n} g_i(tx)(\mathrm{d}t \cdot x_i + t \cdot \mathrm{d}x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_i(tx) x_i \, \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} t g_i(tx) \, \mathrm{d}x_i.\end{aligned}$$

Wir nehmen davon nur den ersten Term und definieren somit den Kandidaten α für die Stammfunktion von ω durch die 0-Form

$$\alpha(x) := \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} g_i(tx) x_i \right) \mathrm{d}t.$$

Es gilt

$$0 = \mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}g_i \, \mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \, \mathrm{d}x_i = \sum_{1 \leq j < i \leq n} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x_j \, \mathrm{d}x_i;$$

da die $\mathrm{d}x_j \, \mathrm{d}x_i$ für $1 \leq j < i \leq n$ linear unabhängig sind, folgt $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$ für alle $i \neq j$. Dann ist α eine Stammfunktion von ω, weil

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\big(g_i(tx) x_i\big) \, \mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g_i(tx)}{\partial x_j} \cdot x_i + g_i(tx) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x_j \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j(tx)}{\partial x_i} x_i \, \mathrm{d}x_j + g_j(tx) \, \mathrm{d}x_j \right) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \big(g_j(tx) t\big) \, \mathrm{d}x_j \right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big[g_j(tx) t \Big]_{t=0}^{t=1} \mathrm{d}x_j = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \, \mathrm{d}x_j = \omega(x).\end{aligned}$$

[31] Ein topologischer Raum X ist *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $x, y \in X$ einen *Weg* von x nach y gibt, also eine stetige Abbildung $p : [0, 1] \to X$ mit $p(0) = x$ und $p(1) = y$.

Für $p > 1$ setzt man die Darstellung

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} g_{i_1 \ldots i_p} \, \mathrm{d}x_{i_1} \ldots \mathrm{d}x_{i_p}$$

an und wählt für α analog zum Fall $p = 1$ den Ansatz

$$\alpha := \int_0^1 \omega(tx).$$

Wegen $\mathrm{d}(tx_{i_k}) = \mathrm{d}t \cdot x_{i_k} + t \cdot \mathrm{d}x_{i_k}$ gilt

$$\begin{aligned}
\omega(tx) &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} g_{i_1 \ldots i_p}(tx) \, \mathrm{d}(tx_{i_1}) \ldots \mathrm{d}(tx_{i_p}) \\
&= \mathrm{d}t \wedge \left(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^{p} g_{i_1 \ldots i_p}(tx) t^{p-1} \, \mathrm{d}x_{i_1} \ldots \cancel{\mathrm{d}x_{i_k}} \ldots \mathrm{d}x_{i_p} x_{i_k} (-1)^{k-1} \right) \\
&\qquad + \text{Terme ohne } \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

wir setzen also

$$\alpha(x) := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} x_{i_k} \left(\int_0^1 g_{i_1 \ldots i_p}(tx) t^{p-1} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x_{i_1} \ldots \cancel{\mathrm{d}x_{i_k}} \ldots \mathrm{d}x_{i_p}.$$

Dann rechnet man analog zum Fall $p = 1$ (nur um einiges aufwändiger) nach, dass $\mathrm{d}\alpha = \omega$ gilt. $\square$

13. Transformation von Differentialformen unter differenzierbaren Abbildungen

Definition 13.1. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Weiterhin sei $\varphi : U \to V$ stetig differenzierbar und ω eine p-Form auf V mit $0 \leq p \leq n$. Dann ist die *mit φ zurückgeholte p-Form $\varphi^*\omega$* auf U definiert durch

$$\big((\varphi^*\omega)(x)\big)(v_1, \dots, v_p) := \omega\big(\varphi(x)\big)\big(\varphi'(x) \cdot v_1, \dots, \varphi'(x) \cdot v_p\big)$$

für alle $x \in U$ und alle $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^m$.[32]

Man bezeichnet die Abbildung $\varphi^* : \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$ auch als *Rücktransport* oder *Pullback* entlang φ.

Proposition 13.2. In der Situation von Definition 13.1 gilt:

(1) $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) + \varphi^*(\omega_2)$ für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^p(V)$.

(2) $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2)$ für alle $\omega_1 \in \Omega^p(V)$ und alle $\omega_2 \in \Omega^q(V)$.

(3) Falls $p = 1$ und $\omega = \mathrm{d}f \in \Omega^1(V)$ für eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$, so ist

$$\varphi^*\omega = \mathrm{d}(f \circ \varphi).$$

(4) Falls

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 \dots i_p} \, \mathrm{d}x_{i_1} \dots \mathrm{d}x_{i_p},$$

so ist

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (g_{i_1 \dots i_p} \circ \varphi) \, \mathrm{d}(x_{i_1} \circ \varphi) \dots \mathrm{d}(x_{i_p} \circ \varphi),$$

wobei $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die i-te Koordinatenfunktion ist.

Beweis. (1) Klar.

(2) Für alle $x \in U$ und alle $v_1, \dots, v_{p+q} \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\begin{aligned}
&\big(\varphi^*(\omega_1\omega_2)(x)\big)(v_1, \dots, v_{p+q}) \\
&\quad = \Big((\omega_1\omega_2)\big(\varphi(x)\big)\Big)\big(\varphi'(x) \cdot v_1, \dots, \varphi'(x) \cdot v_{p+q}\big) \\
&\quad = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi)\omega_1\big(\varphi(x)\big)\big(\varphi'(x) \cdot v_{\pi(1)}, \dots, \varphi'(x) \cdot v_{\pi(p)}\big) \\
&\qquad\qquad \cdot \omega_2\big(\varphi(x)\big)\big(\varphi'(x) \cdot v_{\pi(p+1)}, \dots, \varphi'(x) \cdot v_{\pi(p+q)}\big) \\
&\quad = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi)(\varphi^*\omega_1)(x)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \\
&\qquad\qquad \cdot (\varphi^*\omega_2)(x)(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}) \\
&\quad = \big(\varphi^*\omega_1(x) \wedge \varphi^*\omega_2(x)\big)(v_1, \dots, v_{p+q}),
\end{aligned}$$

also $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2)$.

[32] Im Fall $p = 0$ hat man $\varphi^*\omega = \omega \circ \varphi$.

(3) Mit $\omega = \mathrm{d}f = Df$ gilt

$$\mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) = \mathrm{d}f(\varphi(x))\varphi'(x) = \varphi^*(\mathrm{d}f)(x) = \varphi^*\omega(x) \quad \text{für alle} \quad x \in U,$$

denn wir haben

$$f : V \to \mathbb{R}, \qquad \varphi : U \to V, \qquad f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$$

und

$$\omega(x) = \mathrm{d}f(x) \mathrel{\hat{=}} \operatorname{grad} f(x) \in \mathbb{R}^{1\times n}.$$

Etwas präziser: Für $w = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\omega(x)(w) = \operatorname{grad} f(x) \cdot w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi_i,$$

insgesamt haben wir also

$$\mathrm{d}(f \circ \varphi)(x) = \operatorname{grad}(f \circ \varphi)(x) = \operatorname{grad} f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x),$$

also für $v \in \mathbb{R}^m$

$$\mathrm{d}(f \circ \varphi)(x)(v) = \operatorname{grad} f\big(\varphi(x)\big) \cdot \big(\varphi'(x) \cdot v\big) = \omega\big(\varphi(x)\big)\big(\varphi'(x) \cdot v\big) = \varphi^*(\omega)(x)(v).$$

(4) Laut (1) reicht es, Differentialformen $\omega = g_{i_1\ldots i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\ldots\mathrm{d}x_{i_p}$ zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi^*(g_{i_1,\ldots,i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\ldots\mathrm{d}x_{i_p}) &\overset{(2)}{=} \varphi^*(g_{i_1,\ldots,i_p})\varphi^*(\mathrm{d}x_{i_1})\ldots\varphi^*(\mathrm{d}x_{i_p})\\ &\overset{(3)}{=} (g_{i_1\ldots i_p}\circ\varphi)\,\mathrm{d}(x_{i_1}\circ\varphi)\ldots\mathrm{d}(x_{i_p}\circ\varphi).\end{aligned}$$ □

Beispiel 13.3. Betrachte die 2-Form

$$\omega(x_1, x_2, x_3) := x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1 + x_3\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

in $\mathbb{R}^3$. Hole diese zurück nach $\mathbb{R}^2$ mit der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix}\varphi_1(u,v)\\ \varphi_2(u,v)\\ \varphi_3(u,v)\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\cos(u)\cos(v)\\ \sin(u)\cos(v)\\ \sin(v)\end{pmatrix}.$$

Die Abbildung φ parametrisiert die Kugeloberfläche $\mathbb{S}^2$ durch sphärische Koordinaten u, v. Wegen $\mathrm{d}\varphi_i = \mathrm{d}(x_i \circ \varphi) = \varphi^*(\mathrm{d}x_i)$ gilt laut Proposition 13.2

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega &= (x_1\circ\varphi)\,\mathrm{d}(x_2\circ\varphi)\,\mathrm{d}(x_3\circ\varphi) + (x_2\circ\varphi)\,\mathrm{d}(x_3\circ\varphi)\,\mathrm{d}(x_1\circ\varphi)\\ &\quad + (x_3\circ\varphi)\,\mathrm{d}(x_1\circ\varphi)\,\mathrm{d}(x_2\circ\varphi)\\ &= \varphi_1\,\mathrm{d}\varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_3 + \varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_3\,\mathrm{d}\varphi_1 + \varphi_3\,\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}\varphi_2.\end{aligned}$$

Für die Differentiale der φ_i erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi_1 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\,\mathrm{d}v = -\sin(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \cos(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v,\\ \mathrm{d}\varphi_2 &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\,\mathrm{d}v = \cos(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \sin(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v \quad \text{und}\\ \mathrm{d}\varphi_3 &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}\,\mathrm{d}v = \cos(v)\,\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_3 &= \big(\cos(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \sin(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v\big)\cos(v)\,\mathrm{d}v = \cos(u)\cos^2(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,\\
\mathrm{d}\varphi_3\,\mathrm{d}\varphi_1 &= \cos(v)\,\mathrm{d}v\big(-\sin(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \cos(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v\big) = -\cos^2(v)\sin(u)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \cos^2(v)\sin(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}\varphi_2 &= \big(-\sin(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \cos(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v\big)\big(\cos(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \sin(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v\big)\\
&= \sin^2(u)\cos(v)\sin(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \cos^2(u)\sin(v)\cos(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\\
&= \big(\sin^2(u)\cos(v)\sin(v) + \cos^2(u)\sin(v)\cos(v)\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \cos(v)\sin(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Für die zurückgeholte Form erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\varphi^*\omega(u,v) &= \varphi_1(u,v)\,\mathrm{d}\varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_3 + \varphi_2(u,v)\,\mathrm{d}\varphi_3\,\mathrm{d}\varphi_1 + \varphi_3(u,v)\,\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}\varphi_2\\
&= \cos(u)\cos(v)\cos(u)\cos^2(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \sin(u)\cos(v)\cos^2(v)\sin(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&\qquad + \sin(v)\cos(v)\sin(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \big(\cos^2(u)\cos^2(v) + \sin^2(u)\cos^2(v) + \sin^2(v)\big)\cos(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \big(\cos^2(v) + \sin^2(v)\big)\cos(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \cos(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Häufig kürzt man dieses Verfahren in der Notation ab: Wegen $\mathrm{d}\varphi_i = \mathrm{d}(x_i \circ \varphi) = \varphi^*(\mathrm{d}x_i)$ identifiziert man φ_i mit x_i. Man schreibt dann $\mathrm{d}x_i$ statt $\varphi^*(\mathrm{d}x_i)$, etwa

$$\mathrm{d}x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x_1}{\partial v}\,\mathrm{d}v = -\sin(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \cos(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v.$$

(Formal ist das natürlich nicht korrekt, da links eine Form im $\mathbb{R}^3$ steht, die rechts als Linearkombination von Formen im $\mathbb{R}^2$ ausgedrückt wird.) Wie oben berechnet man dann $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$ und die nötigen $\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j$ und erhält

$$\varphi^*\omega(u,v) = x_1(u,v)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + x_2(u,v)\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1 + x_3(u,v)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \ldots = \cos(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v;$$

hierbei steht etwa $x_1(u,v)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$ für

$$\varphi_1(u,v)\varphi^*(\mathrm{d}x_2)\varphi^*(\mathrm{d}x_3) = (x_1 \circ \varphi)(u,v)\varphi^*(\mathrm{d}x_2)\varphi^*(\mathrm{d}x_3) = \varphi^*(x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3).$$

Beispiel 13.4. Betrachte die 2-Form $\omega(x,y,z) := x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ in $\mathbb{R}^3$. Hole diese zurück nach $\mathbb{R}^2$ mit der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v)\\ \sin(u)\cos(v)\\ \sin(v)\end{pmatrix}.$$

Die Abbildung φ parametrisiert die Kugeloberfläche $\mathbb{S}^2$ durch sphärische Koordinaten u, v. Für die Differentiale erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\mathrm{d}x) &= \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v = -\sin(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \cos(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v,\\
\varphi^*(\mathrm{d}y) &= \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v = \cos(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \sin(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v \quad \text{und}\\
\varphi^*(\mathrm{d}z) &= \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v = \cos(v)\,\mathrm{d}v,
\end{aligned}$$

also

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) &= \big(\cos(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \sin(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v\big)\cos(v)\,\mathrm{d}v = \cos(u)\cos^2(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,\\
\varphi^*(\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x) &= \cos(v)\,\mathrm{d}v\big(-\sin(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \cos(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v\big) = -\cos^2(v)\sin(u)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\\
&\hphantom{=} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \cos^2(v)\sin(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) &= \big(-\sin(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \cos(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v\big)\big(\cos(u)\cos(v)\,\mathrm{d}u - \sin(u)\sin(v)\,\mathrm{d}v\big)\\
&= \sin^2(u)\cos(v)\sin(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \cos^2(u)\sin(v)\cos(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\\
&= \big(\sin^2(u)\cos(v)\sin(v) + \cos^2(u)\sin(v)\cos(v)\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \cos(v)\sin(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

Für die zurückgeholte Form erhalten wir somit

$$
\begin{aligned}
\varphi^*\omega(u,v) &= x(u,v)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y(u,v)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z(u,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \cos(u)\cos(v)\cos(u)\cos^2(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \sin(u)\cos(v)\cos^2(v)\sin(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&\qquad + \sin(v)\cos(v)\sin(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \big(\cos^2(u)\cos^2(v) + \sin^2(u)\cos^2(v) + \sin^2(v)\big)\cos(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \big(\cos^2(v) + \sin^2(v)\big)\cos(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \cos(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

Satz 13.5. Falls ω stetig differenzierbar und φ zweimal stetig differenzierbar ist, so ist $\varphi^*\omega$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\varphi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\big(\varphi^*(\omega)\big).$$

Beweis. Sei

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} g_{i_1,\ldots,i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\ldots\mathrm{d}x_{i_p},$$

dann ist

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} \mathrm{d}g_{i_1,\ldots,i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\ldots\mathrm{d}x_{i_p}$$

und somit

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(\mathrm{d}\omega) &= \varphi^*\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} \mathrm{d}g_{i_1,\ldots,i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\ldots\mathrm{d}x_{i_p}\right)\\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} \varphi^*(\mathrm{d}g_{i_1,\ldots,i_p})\varphi^*(\mathrm{d}x_{i_1})\ldots\varphi^*(\mathrm{d}x_{i_p})\\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} \mathrm{d}(g_{i_1,\ldots,i_p}\circ\varphi)\,\mathrm{d}(x_{i_1}\circ\varphi)\ldots\mathrm{d}(x_{i_p}\circ\varphi)\\
&= \mathrm{d}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} (g_{i_1,\ldots,i_p}\circ\varphi)\,\mathrm{d}(x_{i_1}\circ\varphi)\ldots\mathrm{d}(x_{i_p}\circ\varphi)\right)\\
&= \mathrm{d}\varphi^*(\omega).
\end{aligned}
$$

□

14. Flächeninhalt von parametrisierten Flächen

Definition 14.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}^k$. Eine Abbildung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar/stetig differenzierbar/...*, falls φ zu einer differenzierbaren/stetig differenzierbaren/... Abbildung $\overline{\varphi} : U \to \mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden kann, wobei $I \subseteq U$ für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$.

Definition 14.2. Sei $0 < k \leq n$. Eine *k-dimensionale parametrisierte Fläche* im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}^k$ messbar. Für die k-dimensionale parametrisierte Fläche notieren wir das Tupel (I, φ).

Beispiel 14.3. (1) Stetig differenzierbare Kurven $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sind eindimensionale parametrisierte Flächen.

(2) Für $r > 0$ ist

$$\varphi : [0, \pi] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (s, t) \mapsto \big(r\sin(s)\cos(t), r\sin(s)\sin(t), r\cos(s)\big)$$

eine 2-dimensionale parametrisierte Fläche im $\mathbb{R}^3$, die Kugeloberfläche

$$\big\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = r\big\}$$

der Kugel mit Radius r; vergleiche Beispiel 13.4.

Motivation 14.4. Was ist das Volumen einer parametrisierten Fläche (I, φ)?

(1) Für $k = 1$ und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ hatten wir in der Analysis II in Satz 6.9 für die Länge der Kurve die Formel

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

(2) Für eine bijektive Abbildung $\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist das Volumen des Bildes durch den Transformationssatz (Satz 6.10) bestimmt:

$$\lambda^n\big(\Theta(A)\big) = \int_A \big|\det\big(\Theta'(x)\big)\big| \,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_A \sqrt{\det\big(\Theta'(x)^\top \Theta'(x)\big)} \,\mathrm{d}\lambda^n(x).$$[33]

(3) Auch für $k < n$ ist $\sqrt{\det(\Theta^\top \Theta)}$ für lineares $\Theta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ das Volumen von $\Theta([0,1]^k) \subseteq \mathbb{R}^n$. Als einfaches Beispiel dafür betrachte die lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, welche durch die Matrix

$$\Theta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Diese bildet das Einheitsquadrat im $\mathbb{R}^2$ ab auf das Rechteck in der x_1-x_2-Ebene im $\mathbb{R}^3$, welches Seiten der Größe λ_1 und λ_2, also den Flächeninhalt $\lambda_1\lambda_2$ hat. In der Tat gilt nun $\sqrt{\det(\Theta^\top\Theta)} = \lambda_1\lambda_2$, da

$$\det(\Theta^\top\Theta) = \det\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} = \lambda_1^2\lambda_2^2.$$

[33] Man beachte, dass die letzte Darstellung auch obige Formel für Kurven beschreibt, da dann $\dot{\gamma}(t)^\top\dot{\gamma}(t)$ eine 1×1-Matrix ist und somit $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \langle\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle = \dot{\gamma}(t)^\top\dot{\gamma}(t) = \det\big(\dot{\gamma}(t)^\top\dot{\gamma}(t)\big)$ gilt.

(4) Approximation von beliebigen Abbildungen $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ durch kleine k-dimensionale Würfel motiviert dann die folgende Definition.

Definition 14.5. Der *Flächeninhalt* (oder das *Volumen*) einer parametrisierten Fläche (I, φ) ist

$$\operatorname{vol}(I, \varphi) := \int_I \sqrt{\det\big(\varphi'(x)^\top \varphi'(x)\big)}\, \mathrm{d}x := \int_I \sqrt{\det\big(\varphi'(x)^\top \varphi'(x)\big)}\, \mathrm{d}\lambda^k(x).$$

Bemerkung 14.6. Im Allgemeinen gilt $\operatorname{vol}(I, \varphi) \neq \operatorname{vol}(\varphi(I))$: Falls φ nicht injektiv ist, können Teile vom Bild von φ öfter durchlaufen werden. So wird für

$$\varphi : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big)$$

der Einheitskreis zweimal durchlaufen und

$$\operatorname{vol}([0, 4\pi], \varphi) = \int_0^{4\pi} \|\dot{\varphi}(t)\|\, \mathrm{d}t = 4\pi.$$

Satz 14.7. Die Definition des Flächeninhaltes in Definition 14.5 ist invariant unter Parameterwechsel: Seien $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ messbar und $I_1 \subseteq U_1$ sowie $I_2 \subseteq U_2$ mit $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Sei $\Theta : U_1 \to U_2$ bijektiv und stetig differenzierbar mit $\Theta(I_1) = I_2$; weiterhin sei auch Θ^{-1} stetig differenzierbar. Sei $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte k-dimensionale Fläche und $\varphi_1 := \varphi_2 \circ \Theta : I_1 \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\operatorname{vol}(I_1, \varphi_1) = \operatorname{vol}(I_2, \varphi_2).$$

Beweis. Mit Kettenregel und Transformationssatz (Satz 6.10) gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(I_1, \varphi_1) &= \int_{I_1} \sqrt{\det\big[\varphi_1'(x)^\top \varphi'(x)\big]}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{I_1} \sqrt{\det\Big[\Big(\varphi_2'\big(\Theta(x)\big) \cdot \Theta'(x)\Big)^\top \Big(\varphi_2'\big(\Theta(x)\big) \cdot \Theta'(x)\Big)\Big]}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{I_1} \sqrt{\det\Big[\Theta'(x)^\top \varphi_2'\big(\Theta(x)\big)^\top \varphi_2'\big(\Theta(x)\big)\Theta'(x)\Big]}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{I_1} \sqrt{\det\Big[\varphi_2'\big(\Theta(x)\big)^\top \varphi_2'\big(\Theta(x)\big)\Big]} \cdot \big|\det\big[\Theta'(x)\big]\big|\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{I_2} \sqrt{\det\big[\varphi_2'(y)^\top \varphi_2'(y)\big]}\, \mathrm{d}y \\
&= \operatorname{vol}(I_2, \varphi_2).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 14.8. Um den Flächeninhalt der Kugeloberfläche

$$\mathbb{S}^2(r) := \big\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\big\}$$

vom Radius $r > 0$ zu berechnen, parametrisieren wir wie in Beispiel 14.3 mit

$$\varphi : [0, \pi] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (s, t) \mapsto \big(r\sin(s)\cos(t), r\sin(s)\sin(t), r\cos(s)\big).$$

Mit

$$\varphi'(s, t) = \begin{pmatrix} r\cos(s)\cos(t) & -r\sin(s)\sin(t) \\ r\cos(s)\sin(t) & r\sin(s)\cos(t) \\ -r\sin(s) & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\varphi'(s,t)^\top \varphi'(s,t) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2(s) \end{pmatrix},$$

also

$$\sqrt{\det\big[\varphi'(s,t)^\top \varphi'(s,t)\big]} = r^2|\sin(s)|$$

und somit

$$\mathrm{vol}(I,\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} r^2|\sin(s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = 2\pi r^2\Big[-\cos(s)\Big]_{s=0}^{s=\pi} = 4\pi r^2.$$

Definition 14.9. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine bijektive Abbildung $\alpha : U \to V$ heißt *Diffeomorphismus*, falls α und α^{-1} stetig differenzierbar sind.

Definition 14.10. (1) Eine *k-dimensionale parametrisierte Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^n$ (mit $n \geq k$) ist eine parametrisierte Fläche $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ mit $I \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, so dass φ fortgesetzt werden kann zu einem Diffeomorphismus $\alpha : U \to V$ für offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $I \subseteq U$.[34]

(2) Eine *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass zu jedem $x \in M$ eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x \in V$ existiert, so dass $M \cap V$ eine parametrisierte Untermannigfaltigkeit ist. Da die zugehörige Parametrisierung $\varphi : I \to M \cap V$ zu einem Diffeomorphismus fortgesetzt werden kann, ist sie insbesondere bijektiv. Die Umkehrabbildung φ^{-1} heißt *Karte*.

Satz 14.11. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß vol auf den Borelmengen von M[35], so dass für jede Karte $\varphi : I \to M \cap V$ und jede Borelmenge $E \subseteq I$ gilt

$$\mathrm{vol}\big(\varphi(E)\big) = \mathrm{vol}(E,\varphi).$$

Beweisskizze. Sei $A \subseteq M$ eine Borelmenge. Man kann zeigen, dass $A = \dot{\bigcup}_{i\in\mathbb{N}} A_i$, so dass jedes A_i in einer Karte (I_i, φ_i) liegt. Definiere dann

$$\mathrm{vol}(A) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(A_i) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}\big(\varphi_i^{-1}(A_i), \varphi_i\big).$$

Mit Satz 14.7 kann man zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Auswahl der Parametrisierungen ist. Abschließend zeigt man die σ-Additivität von vol und erhält somit, dass vol ein Maß auf M ist. □

Bemerkung 14.12. Wir haben hier die Integration über M durch Integration über disjunkte Teile definiert, welche jeweils in einer Karte durchgeführt werden können. Diese Zerlegung wird üblicherweise umgangen, indem man über überlappende Karten integriert (M wird durch "Atlas" von kompatiblen Karten überdeckt), die Überlappung aber durch eine "Zerlegung der Eins" berücksichtigt. Wir werden später in Satz 16.6 diesen Zugang mit der Zerlegung der Eins betrachten.

[34] Hierbei identifizieren wir $\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k} \subseteq \mathbb{R}^n$.

[35] Wir betrachten M als metrischen Raum mit der dadurch induzierten Topologie und können bezüglich dieser dann über Borelmengen sprechen.

15. Integration von Differentialformen

Definition 15.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}^p$ eine Borelmenge, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : I \to U$ stetig differenzierbar[36] und ω eine p-Form auf U. Dann ist $\varphi^*(\omega)$ eine p-Form auf I, also $\varphi^*(\omega) = f \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_p$ für eine Funktion f auf I. Wir nennen ω *bezüglich φ integrierbar*, falls f integrierbar ist und wir setzen

$$\int_\varphi \omega := \int_I f \,\mathrm{d}\lambda^p(x).$$

Beispiel 15.2. (1) Die Integration einer 1-Form über eine Kurve wird in der Übung näher untersucht.

(2) Zur Integration einer 2-Form über eine zweidimensionale parametrisierte Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir eine Borelmenge $I \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\varphi : I \to M$ mit einer Differentialform

$$\omega = f_1 \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_3 + f_2 \,\mathrm{d}x_3 \,\mathrm{d}x_1 + f_3 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2.$$

Wir schreiben $\omega = \langle F, \mathrm{d}\vec{A} \rangle$ mit $F := (f_1, f_2, f_3)$. Der Rückzug ist dann

$$\varphi^*(\omega) = \varphi^*(f_1)\varphi^*(\mathrm{d}x_2)\varphi^*(\mathrm{d}x_3) + \varphi^*(f_2)\varphi^*(\mathrm{d}x_3)\varphi^*(\mathrm{d}x_1) + \varphi^*(f_3)\varphi^*(\mathrm{d}x_1)\varphi^*(\mathrm{d}x_2),$$

wobei

$$\varphi^*(\mathrm{d}x_i) = \mathrm{d}(\varphi^* x_i) = \mathrm{d}(x_i \circ \varphi) = \mathrm{d}\varphi_i.$$

Unsere Parametrisierung φ hat die Darstellung

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \mapsto \big(\varphi_1(s,t), \varphi_2(s,t), \varphi_3(s,t)\big).$$

Mit

$$\varphi^*(\mathrm{d}x_i) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial s}\mathrm{d}s + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

ist der Rückzug von ω vermöge φ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\omega) &= \Bigg((f_1 \circ \varphi) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial s}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial s}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) + (f_2 \circ \varphi) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial s}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \right) \\
&\qquad + (f_3 \circ \varphi) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) \Bigg) \mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \\
&= \langle F \circ \varphi, \tilde{n}(\varphi) \rangle \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{n}(\varphi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial s}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial s}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

[36] Wieder im Sinne von: φ kann fortgesetzt werden zu einer stetig differenzierbaren Funktion $\overline{\varphi} : V \to U$ für eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^p$ mit $I \subseteq V$; wir betrachten dann eigentlich $\overline{\varphi}^*(\omega)$ als p-Form auf V.

Dabei haben wir das *Kreuzprodukt* oder auch *Vektorprodukt* auf dem $\mathbb{R}^3$ verwendet:

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (v, w) \mapsto v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass dieses für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ die folgende Eigenschaften hat:

(i) $v \times w \perp v$ und $v \times w \perp w$.[37]

(ii) $v \times w = -w \times v$.

(iii) $\langle u, v \times w \rangle = \det(u, v, w)$.

(iv) $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 \sin^2(\measuredangle(v, w)) = \det((v|w)^\top (v|w))$, wobei

$$(v|w) := \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\tilde{n}(\varphi)(s, t)$ ist also der Normalenvektor der parametrisierten Fläche M im Punkt $\varphi(s, t)$ mit Länge

$$\|\tilde{n}(\varphi)\|^2 = \det \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{pmatrix} \right) = \det\bigl({\varphi'}^\top \varphi'\bigr),$$

also gilt im Besonderen an der Stelle $\varphi(s, t)$ für die Länge

$$\|\tilde{n}(\varphi)(s, t)\| = \sqrt{\det\bigl(\varphi'(s, t)^\top \cdot \varphi'(s, t)\bigr)}.$$

Bezeichnen wir mit $n(\varphi)$ den entsprechenden normierten Einheitsnormalenvektor, so gilt dann

$$\varphi^*(\omega) = \langle F \circ \varphi, n(\varphi) \rangle \sqrt{\det\bigl({\varphi'}^\top \varphi'\bigr)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t,$$

und damit erhalten wir für das Integral

$$\begin{aligned} \int_\varphi \omega &= \int_I \bigl\langle F\bigl(\varphi(s, t)\bigr), n(\varphi)(s, t) \bigr\rangle \sqrt{\det\bigl(\varphi'(s, t)^\top \cdot \varphi'(s, t)\bigr)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t \\ &= \int_M \langle F(\eta), n(\eta) \rangle\, \mathrm{d}\,\mathrm{vol}(\eta). \end{aligned}$$

Entspricht etwa im physikalischen Kontext F einem Strömungsvektor, so beschreibt $\int_\varphi \omega$ den Fluss durch die Fläche M.

[37] Hierbei steht $a \perp b$ für $\langle a, b \rangle = 0$, also a steht orthogonal zu b.

(3) Als konkretes Beispiel betrachten wir die Kugeloberfläche $\mathbb{S}^2(1)$ der Einheitskugel und die Differentialform

$$\omega(x,y,z) := x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \langle F, \mathrm{d}\vec{A}\rangle$$

mit dem Vektorfeld $F = (x,y,z)$. Da F orthogonal auf der Kugeloberfläche steht, gilt $\langle F(\eta), n(\eta)\rangle = 1$, also ist

$$\int_\varphi \omega = \int_M \mathrm{d}\operatorname{vol}(\eta) = \operatorname{vol}(M).$$

Nun gilt nach Beispiel 13.4 $\varphi^*(\omega)(u,v) = \cos(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, also

$$\int_\varphi \omega = \int_I \cos(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 2\pi\Big[\sin(v)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$$

Satz 15.3. Seien $I \subseteq \mathbb{R}^p$ eine Borelmenge, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : I \to U$ stetig differenzierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$ und ω_1, ω_2 zwei p-Formen auf U. Dann gilt

$$\int_\varphi (\omega_1 + \omega_2) = \int_\varphi \omega_1 + \int_\varphi \omega_2 \quad \text{und} \quad \int_\varphi (\lambda\omega_1) = \lambda \int_\varphi \omega_1.$$

Beweis. Folgt aus den entsprechenden Rechenregeln für den Rückzug:

$$\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) + \varphi^*(\omega_2) \quad \text{und} \quad \varphi^*(\lambda\omega_1) = \lambda\varphi^*\omega_1. \qquad \square$$

Satz 15.4 (Parameterwechsel)**.** Seien $I \subseteq \mathbb{R}^p$ eine Borelmenge, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : I \to U$ stetig differenzierbar. Weiterhin seien $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $I \subseteq V_1$, $\Theta : V_2 \to V_1$ ein Diffeomorphismus, $J := \Theta^{-1}(I) \subseteq V_2$ und $\psi := \varphi \circ \Theta : J \to U$. Der Diffeomorphismus Θ heißt

- *orientierungserhaltend*, falls $\det(\Theta'(x)) > 0$ für alle $x \in J$, und
- *orientierungsumkehrend*, falls $\det(\Theta'(x)) < 0$ für alle $x \in J$.

Ist nun ω eine p-Form auf U, dann gilt

$$\int_\psi \omega = \begin{cases} +\int_\varphi \omega, & \text{falls } \Theta \text{ ordnungserhaltend,} \\ -\int_\varphi \omega, & \text{falls } \Theta \text{ ordnungsumkehrend.} \end{cases}$$

Proposition 15.5. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi_1 : U \to V$ sowie $\varphi_2 : V \to W$ stetig differenzierbar. Dann gilt $(\varphi_2 \circ \varphi_1)^* = \varphi_1^* \circ \varphi_2^*$.

Beweis. Sei ω eine p-Form auf W. Zu zeigen ist, dass $(\varphi_2 \circ \varphi_1)^*(\omega) = \varphi_1^*(\varphi_2^*(\omega))$. Für alle $x \in U$ und alle $\xi_1, \dots, \xi_p \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\begin{aligned}
&\big((\varphi_2 \circ \varphi_1)^*\omega\big)(x)(\xi_1, \dots, \xi_p) \\
&\qquad = \omega\Big(\big(\varphi_2 \circ \varphi_1\big)(x)\Big)\big((\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)\xi_1, \dots, (\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)\xi_p\big) \\
&\qquad = \omega\Big(\varphi_2\big(\varphi_1(x)\big)\Big)\Big(\varphi_2'\big(\varphi_1(x)\big)\varphi_1'(x)\xi_1, \dots, \varphi_2'\big(\varphi_1(x)\big)\varphi_1'(x)\xi_p\Big) \\
&\qquad = \varphi_2^*\omega\big(\varphi_1(x)\big)\big(\varphi_1'(x)\xi_1, \dots, \varphi_1'(x)\xi_p\big) \\
&\qquad = \big(\varphi_1^*(\varphi_2^*\omega)\big)(x)(\xi_1, \dots, \xi_p).
\end{aligned} \qquad \square$$

Beweis von Satz 15.4. Mit Proposition 15.5 und Aufgabe 2 von Übungsblatt 11 lässt sich der Rückzug entlang ψ schreiben als

$$\psi^*\omega(x) = (\varphi \circ \Theta)^*\omega(x) = \Theta^*\big(\varphi^*(\omega)\big)(x) = \det\big(\Theta'(x)\big)\varphi^*\omega\big(\Theta(x)\big).$$

Mit $\varphi^*\omega = f\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_p$ gilt

$$\psi^*(\omega) = \det(\Theta') \cdot f \circ \Theta \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_p$$

und somit

$$\int_\psi \omega = \int_J (f \circ \Theta)(x) \det\big(\Theta'(x)\big) \mathrm{d}\lambda^p(x).$$

Wegen

$$\big|\det\big(\Theta'(y)\big)\big| = \begin{cases} + \det\big(\Theta'(y)\big), & \text{falls } \Theta \text{ ordnungserhaltend,} \\ - \det\big(\Theta'(y)\big), & \text{falls } \Theta \text{ ordnungsumkehrend} \end{cases}$$

erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int_\varphi \omega &= \int_I f(x) \mathrm{d}\lambda^p(x) \\ &= \int_J f\big(\Theta(y)\big) \cdot \big|\det\big(\Theta'(y)\big)\big| \mathrm{d}\lambda^p(y) = \begin{cases} + \int_\psi \omega, & \text{falls } \Theta \text{ ordnungserhaltend,} \\ - \int_\psi \omega, & \text{falls } \Theta \text{ ordnungsumkehrend.} \end{cases} \end{aligned}$$

□

16. Berandete Mannigfaltigkeiten und Zerlegung der Eins

Eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ sieht lokal aus wie $\mathbb{R}^k$, eine k-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit soll lokal aussehen wie der "$\mathbb{R}^k$ mit Rand": Der sogenannte abgeschlossene Halbraum $\mathbb{H}^k$.

Notation 16.1. Wir setzen $\mathbb{H}^k := \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$ und wir nennen

$$\partial\mathbb{H}^k := \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k = 0\}$$

den Rand von $\mathbb{H}^k$.

Definition 16.2. (1) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^n$, wenn sie lokal diffeomorph zu $\mathbb{H}^k$ ist: Zu jedem $x \in M$ gibt es eine in M offene Umgebung U und einen Diffeomorphismus $\alpha : U \to \mathbb{R}^k$ auf eine offene Teilmenge $\alpha(U)$ von $\mathbb{H}^k$.[38]

(2) Jedes solche $\alpha : U \to \mathbb{H}^k$ heißt *Karte* für M, $\alpha^{-1} : \alpha(U) \to M$ heißt *Parametrisierung* für M.

(3) Eine Familie von Karten, deren Definitionsbereiche ganz M überdecken, heißt *Atlas* für M.

Lemma 16.3. Seien $\alpha : U \to \mathbb{H}^k$ und $\beta : V \to \mathbb{H}^k$ zwei Karten für die k-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit M. Für alle $x \in U \cap V$ gilt $\alpha(x) \in \partial\mathbb{H}^k$ genau dann, wenn $\beta(x) \in \partial\mathbb{H}^k$.

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\alpha \circ \beta^{-1} : \beta(U \cap V) \xrightarrow{\beta^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\alpha} \alpha(U \cap V),$$

dann ist $\alpha \circ \beta^{-1}$ ein Diffeomorphismus von offenen Teilmengen von $\mathbb{H}^k$ auf offene Teilmengen von $\mathbb{H}^k$. Da das Differential verschieden von 0 ist, ist $\alpha \circ \beta^{-1}$ lokal invertierbar in einer Umgebung in $\mathbb{R}^k$, das heißt innere Punkte von $\mathbb{H}^k$ können nicht auf $\partial\mathbb{H}^k$ abgebildet werden. Somit bildet $\alpha \circ \beta^{-1}$ den Rand $\partial\mathbb{H}^k$ auf sich selbst ab. Ist also $\beta(x) \in \partial\mathbb{H}^k$, dann gilt $\alpha(x) = \alpha \circ \beta^{-1}(\beta(x)) \in \partial\mathbb{H}^k$. □

Definition 16.4. Sei M eine k-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Die Punkte $x \in M$, die von einer (und somit von allen) Karte(n) in $\partial\mathbb{H}^k$ abgebildet werden, heißen *Randpunkte* von M. Die Menge dieser Punkte heißt der *Rand* von M und wird mit ∂M bezeichnet.

Bemerkung 16.5. (1) Da $\alpha|_{\partial M} : U \cap \partial M \to \partial\mathbb{H}^k \cong \mathbb{R}^{k-1}$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{k-1}$ ist, ist ∂M eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit (oder leer), aber ∂M selbst hat keinen Rand: $\partial(\partial M) = \emptyset$.

(2) Der Rand ∂M ist *nicht* der topologische Rand bezüglich der Einbettung im $\mathbb{R}^n$. Sei zum Beispiel $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ eine eindimensionale berandete Mannigfaltigkeit. Eingebettet im $\mathbb{R}^2$ ist $I \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus I} = I$ der topologische Rand, der Rand im Sinne unserer Definition ist aber $\partial I = \{a, b\}$.

[38] U ist genau dann offen in $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es ein offenes $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $U = M \cap \tilde{U}$.

Satz 16.6 (Zerlegung der Eins)**.** Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte berandete k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $(\alpha_t : U_t \to \mathbb{H}^k)_{t \in I}$ ein Atlas für M mit einer beliebigen Indexmenge I. Dann gibt es endlich viele stetig differenzierbare Funktionen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m : M \to [0,1]$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gibt es ein $t \in I$ mit

$$\operatorname{supp}(\lambda_i) := \overline{\{x \in M \mid \lambda_i(x) \neq 0\}} \subseteq U_t.$$

(ii) Für alle $x \in M$ gilt $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) = 1$.

Beweis. (1) Für jede offene Menge $V \subseteq \mathbb{H}^k$ und jedes $x \in V$ gibt es eine (unendlich oft) stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{H}^k \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{H}^k) = [0,1]$, $f(x) = 1$ und $\operatorname{supp}(f) \subseteq V$: Für $k = 1$ wähle eine geeignete Reskalierung und Verschiebung von

$$f : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(1 - \dfrac{1}{1 - x^2}\right), & |x| < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion f erfüllt $f(\mathbb{H}^1) = [0,1]$, $f(0) = 1$ und $\operatorname{supp}(f) = [-1,1]$. Weiterhin ist sie an der Stelle 1 unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)}(1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $k > 1$ wähle Produkte von solchen Funktionen für alle Koordinatenrichtungen.

(2) Für $x \in M$ wähle eine Karte $\alpha_{t(x)}$ mit $x \in U_{t(x)}$, dann ist $\alpha_{t(x)}(U_{t(x)}) \subseteq \mathbb{H}^k$ offen, nach (1) existiert also $f_x : \mathbb{H}^k \to \mathbb{R}$ mit $f_x(\alpha_{t(x)}(x)) = 1$ und $f_x(\mathbb{H}^k) = [0,1]$, so dass $\operatorname{supp}(f_x) \subseteq \alpha_{t(x)}(U_{t(x)})$. Setze

$$\tilde{\lambda}_x : M \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \begin{cases} f_x(\alpha_{t(x)}(y)), & y \in U_{t(x)}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die so gewählten Funktionen $\tilde{\lambda}_x$ gilt

- $\operatorname{supp}(\tilde{\lambda}_x)$ liegt in einer Karte (nämlich in $U_{t(x)}$) sowie
- $\tilde{\lambda}_x(x) = 1$ und $\tilde{\lambda}_x \geq 0$.

Die Mengen $V_x := \{y \in M \mid \tilde{\lambda}_x(y) > 0\}$ sind offen und nichtleer, da $x \in V_x$. Somit ist $\{V_x \mid x \in M\}$ eine offene Überdeckung von M. Da M kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, also existieren $x_1, \ldots, x_m$ mit

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}.$$

Setze $\sigma := \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_{x_i}$, dann gilt $\sigma > 0$ auf ganz M und folglich sind die Funktionen $\lambda_i := \frac{1}{\sigma} \lambda_{x_i}$ wohldefiniert. Damit haben wir dann aber

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

und $\operatorname{supp}(\lambda_i) = \operatorname{supp}(\tilde{\lambda}_{x_i}) \subseteq U_{t(x_i)}$ liegt jeweils in einer Karte. $\square$

Bemerkung 16.7. Bis jetzt haben wir das Integral über Differentialformen nur für eine Karte beziehungsweise Parametrisierung definiert. Mit der Zerlegung der Eins können wir das Integral über ganze *kompakte* Untermannigfaltigkeiten zusammensetzen:

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^m \int_M \lambda_i \omega = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i} \lambda_i \omega,$$

wobei $\varphi_i = \alpha_{t(x)}^{-1}$ die Parametrisierung der Karte ist, auf der $\lambda_i \omega$ lebt.

Es bleibt natürlich zu zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Karten und der gewählten Zerlegung der Eins ist. Dies folgt im wesentlichen wie in Satz 15.4 mit Hilfe der Transformationsformel. Allerdings bekommt man dort eventuell einen Vorzeichenwechsel und für eine sinnvolle Theorie sollte man in der Lage sein, dieses Vorzeichen über den ganzen Atlas hinweg zu kontrollieren. Dies geht nur für "orientierbare" Mannigfaltigkeiten.

17. Orientierung von Mannigfaltigkeiten und ihren Rändern

Definition 17.1. (1) Ein Atlas $(\alpha_t : U_t \to \mathbb{H}^k)_{t\in I}$ von M heißt *orientiert*, wenn für je zwei Karten α_t und α_s der Kartenwechsel

$$\Theta := \alpha_t \circ \alpha_s^{-1}|_{\alpha_s(U_s\cap U_t)} : \quad \underbrace{\alpha_s(U_s \cap U_t)}_{\subseteq \mathbb{H}^k} \xrightarrow{\alpha_s^{-1}} U_s \cap U_t \xrightarrow{\alpha_t} \underbrace{\alpha_t(U_s \cap U_t)}_{\subseteq \mathbb{H}^k}$$

positive Funktionaldeterminante hat, also $\det(\Theta'(x)) > 0$ für alle $x \in \alpha_s(U_s \cap U_t)$.

(2) Eine *orientierte Mannigfaltigkeit* ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einem orientiertem Atlas.

(3) Eine Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, falls sie einen orientierten Atlas besitzt.

Bemerkung 17.2. (1) Orientierbarkeit von M heißt, dass man in einer konsistenten Art eine positiv orientierte Basis stetig im Tangentialraum von M auszeichnen kann.

(2) Falls $M \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-dimensional ist, so ist M orientierbar, falls man in konsistenter Art einen Normalenvektor stetig auf M auszeichnen kann, das heißt man kann konsistent das "Innere" vom "Äußeren" von M unterscheiden. Zum Beispiel ist die Kugeloberfläche $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ orientierbar, aber das Möbiusband ist nicht orientierbar.

(3) Für eine Karte $\alpha : U \to \mathbb{H}^k$ von M mit $U \subseteq M$ offen mit $U \cap \partial M \neq \emptyset$ ist $\alpha|_{U\cap\partial M} : U \cap \partial M \to \mathbb{R}^{k-1}$ eine Karte für den Rand. Gleichorientierte Karten für M liefern gleichorientierte Karten für ∂M und ein orientierter Atlas von M induziert durch Einschränkung auf den Rand einen orientierten Atlas für ∂M. Also: Orientierung auf M induziert Orientierung auf ∂M.

Definition 17.3. Sei M eine k-dimensionale kompakte orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es einen orientierten Atlas und eine dazugehörige Zerlegung der Eins $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ gemäß Satz 16.6. Wir definieren dann für eine k-Form ω auf M ihr Integral über M als

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^m \int_M \lambda_i\omega := \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i} \lambda_i\omega$$

wobei $\varphi_i := \alpha_{t_i}^{-1}$ die Parametrisierung der zu λ_i gehörigen Karte ist.

Bemerkung 17.4. (1) Man zeigt dann, dass diese Definition unabhängig ist von den gemachten Wahlen:

(a) Unabhängigkeit von der Wahl der Zerlegung der Eins.

(b) Unabhängigkeit von der Wahl des orientierten Atlas bis auf ein globales Vorzeichen, also das Verhalten eines positiv orientierten Atlas im Vergleich zu einem negativ orientierten Atlas. Dies entspricht der Freiheit, was wir als "Äußeres" und was als "Inneres" bezeichnen.

(2) Man beachte, dass wir das Integral $\int_M \omega$ nur bis auf das globale Vorzeichen definiert haben; wenn es einen orientierten Atlas gibt, dann können wir durch eine ordnungsumkehrende Umparametrisierung das Vorzeichen ändern. Um dies zu fixieren, müssen wir einen "positiven" Atlas wählen. Wir werden beim Satz von Stokes darauf

nochmal kurz zurückkommen, da wir dort ja über eine Mannigfaltigkeit und über ihren Rand integrieren und die Orientierung in beiden Fällen kompatibel gewählt sein muss, damit wir kein Vorzeichen in der Formel bekommen.

(3) Definition 17.3 ist hauptsächlich von theoretischer Bedeutung. In der Praxis versucht man die Integration auf eine Karte zu beschränken. Man beachte, dass man niederdimensionale Teile der Mannigfaltigkeit beim Integrieren weglassen kann, da diese bezüglich des k-dimensionalen Lebesgue-Maßes eine Nullmenge sind und somit zum Integral nicht beitragen. Für diese reduzierte Mannigfaltigkeit reicht dann oft eine Karte zum Parametrisieren.

18. Der allgemeine Satz von Stokes

Satz 18.1 (Stokes)**.** Sei M eine k-dimensionale kompakte orientierte berandete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Der Rand ∂M trage die induzierte Randorientierung. Für jede $(k-1)$-Form ω auf M gilt

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Insbesondere gilt im Fall $\partial M = \emptyset$ schon $\int_M \mathrm{d}\omega = 0$.

Bemerkung 18.2. Damit wir im Satz von Stokes keinen Faktor -1 zwischen beiden Seiten bekommen, muss die Randorientierung auf ∂M kompatibel mit der Orientierung auf M gewählt werden. Wie sich im Teil (1) vom folgenden Beweis zeigt, muss die kanonische Parametrisierung von ∂M durch Einschränkung der Parametrisierung von M eventuell durch eine orientierungsumkehrende Umparametrisierung "richtig" orientiert werden. Wir wollen hier nicht näher auf die präzise Definition dieser induzierten Randorientierung eingehen.

Beweis von Satz 18.1. (1) Wir beweisen die Behauptung zunächst in einer Karte: Sei ω eine $(k-1)$-Form auf $\mathbb{R}^k$ mit kompaktem Träger. Dann gilt[39]

$$\int_{\mathbb{H}^k} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial \mathbb{H}^k} \omega,$$

denn sei

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} f_j \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{j-1}\,\mathrm{d}x_{j+1} \dots \mathrm{d}x_k.$$

Dann ist die äußere Ableitung

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial f_j}{\partial x_r}\,\mathrm{d}x_r\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{j-1}\,\mathrm{d}x_{j+1} \dots \mathrm{d}x_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(-1)^{j-1}\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_k,$$

also ist

$$\int_{\mathbb{H}^k} \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{H}^k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_k.$$

Gemäß des Satzes von Fubini (Satz 5.10) integrieren wir die rechte Seite erst über die j-te Variable:

- Im Fall $j = k$ gilt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\partial f_k}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_k &= f_k(x_1,\dots,x_{k-1},\infty) - f_k(x_1,\dots,x_{k-1},0)\\ &= -f_k(x_1,\dots,x_{k-1},0),\end{aligned}$$

  denn da f kompakten Träger hat muss $f_k(x_1,\dots,x_{k-1},\infty) = 0$ gelten.[40]

- Im Fall $j \neq k$ gilt analog mit der gleichen Begründung

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j = f_j(x_1,\dots,\infty,\dots,x_k) - f_j(x_1,\dots,-\infty,\dots,x_k) = 0 - 0 = 0.$$

[39] Die Parametrisierung von $\mathbb{H}^k$ ist hier die identische Abbildung.
[40] Ausdrücke wie $f_k(x_1,\dots,x_{k-1},\infty)$ sind hier als Kurzform für $\lim_{t\to\infty} f_k(x_1,\dots,x_{k-1},t)$ zu verstehen.

Insgesamt haben wir also

$$\int_{\mathbb{H}^k} \mathrm{d}\omega = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{k-1}.$$

Nun kümmern wir uns um $\int_{\partial\mathbb{H}^k} \omega$. Dazu brauchen wir eine Parametrisierung von $\partial\mathbb{H}^k$ als $(k-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, wir nehmen zu diesem Zweck zunächst die Einschränkung der Parametrisierung von $\mathbb{H}^k$

$$\varphi : \mathbb{R}^{k-1} \to \partial\mathbb{H}^k, \quad (x_1, \ldots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{k-1}, 0).$$

Wegen $\varphi^*(\mathrm{d}x_k) = 0$ überlebt in $\varphi^*(\omega)$ nur der Term mit $j = k$, also

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(f_k)\varphi^*(\mathrm{d}x_1) \ldots \varphi^*(\mathrm{d}x_{k-1}) = f_k \circ \varphi\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{k-1}.$$

Damit erhalten wir

$$\int_{\partial\mathbb{H}^k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \varphi^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{k-1}.$$

Damit dies mit dem obigen Resultat für das Integral über $\mathrm{d}\omega$ übereinstimmt, müssen wir im Fall von ungeradem k die Orientierung der Parametrisierung von $\mathbb{H}^{k-1}$ umkehren, etwa indem wir x_1 durch $-x_1$ ersetzen.

(2) Die Aussage gilt, falls der Träger von ω ganz in einer Karte liegt, da sich diese Situation durch den Rückzug genau auf (1) zurückführen lässt.

(3) Im allgemeinen Fall wählen wir zunächst einen orientierten Atlas und dazu eine Zerlegung der Eins $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Dann gilt der Satz nach (2) für jedes $\lambda_i\omega$, also

$$\int_M \mathrm{d}(\lambda_i\omega) = \int_{\partial M} \lambda_i\omega.$$

Summieren aller m Gleichungen liefert wegen $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$

$$\sum_{i=1}^m \int_M \mathrm{d}(\lambda_i\omega) = \sum_{i=1}^m \int_{\partial M} \lambda_i\omega = \int_{\partial M} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right) \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Wegen

$$\mathrm{d}(\lambda_i\omega) = \mathrm{d}\lambda_i \wedge \mathrm{d}\omega + \lambda_i \wedge \mathrm{d}\omega$$

und

$$\sum_{i=1}^m \mathrm{d}\lambda_i = \mathrm{d}\sum_{i=1}^m \lambda_i = \mathrm{d}1 = 0$$

gilt insgesamt

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_{i=1}^m \int_M \mathrm{d}(\lambda_i\omega) = \int_M \Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^m \mathrm{d}\lambda_i}_{=0} \wedge \mathrm{d}\omega + \underbrace{\sum_{i=1}^m \lambda_i}_{=1}\mathrm{d}\omega\Bigg) = \int_M \mathrm{d}\omega. \qquad \square$$

Bemerkung 18.3. (1) Für nicht kompakte M gilt der Satz nicht in dieser Allgemeinheit, man braucht dann Voraussetzungen, die die Randterme $f(\dots,\pm\infty,\dots)$ in der partiellen Integration verschwinden lassen.

(2) Man kann den Satz von Stokes auch verallgemeinern für Mannigfaltigkeiten M, wo der Rand auch "Ecken" haben darf (von niedrigerer Dimension), zum Beispiel für Würfel.

Bemerkung 18.4. (1) Eine p-Form ω auf einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist nach unserer Definition in jedem Punkt x eine alternierende Multilinearform auf $\mathbb{R}^n$, das heißt die p Argumente von $\omega(x)$ können Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ sein. Allerdings benutzen wir in allen konkreten Rechnungen nur die bezüglich einer Parametrisierung $\varphi : I \to M$ zurückgeholte Form $\varphi^*\omega$, und für die gilt

$$\varphi^*\omega(x)(v_1,\dots,v_p) = \omega\big(\varphi(x)\big)\big(\varphi'(x)\cdot v_1,\dots,\varphi'(x)\cdot v_p\big).$$

Die dort auftauchenden Argumente von $\omega(\varphi(x))$ sind nicht beliebig im $\mathbb{R}^n$, sondern liegen im *Tangentialraum* von M am Punkt $\varphi(x)$. Somit sind die p-Formen auf M eigentlich alternierende Multilinearformen auf dem Tangentialraum.

(2) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ k-dimensional, so ist auch die Dimension des Tangentialraums k, das heißt effektiv sind p-Formen auf M mit $p > k$ gleich Null.

Satz 18.5 (Retraktionssatz)**.** Sei $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$ die n-dimensionale abgeschlossene Einheitskugel mit Rand $\partial\mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, der $(n-1)$-dimensionalen Kugeloberfläche. Dann gibt es keine zweimal stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$\Phi(\mathbb{B}^n) \subseteq \partial\mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1} \quad \text{und} \quad \Phi|_{\partial\mathbb{B}^n} = \mathrm{id}\,.$$

Beweis. Sei Φ eine solche Abbildung. Betrachte die $(n-1)$-Form $\omega = x_1 \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n$ auf $\mathbb{R}^n$ mit der äußeren Ableitung $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_n$. Der Rückzug $\Phi^*(\mathrm{d}\omega)$ ist dann eine n-Form auf dem $(n-1)$-dimensionalem Tangentialraum von $\mathbb{S}^{n-1}$, da Φ nach $\mathbb{S}^{n-1}$ abbildet, also gilt $\Phi^*(\mathrm{d}\omega) = 0$. Nach dem Satz von Stokes (Satz 18.1) gilt dann

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} \Phi^*\omega \overset{18.1}{=} \int_{\mathbb{B}^n} \mathrm{d}\Phi^*(\omega) = \int_{\mathbb{B}^n} \underbrace{\Phi^*(\mathrm{d}\omega)}_{=0} = 0.$$

Wegen $\Phi|_{\partial\mathbb{B}^n} = \mathrm{id}$ gilt

$$\Phi^*\omega|_{\partial\mathbb{B}^n} = \omega|_{\partial\mathbb{B}^n} = x_1\,\mathrm{d}x_1\dots\,\mathrm{d}x_n|_{\partial\mathbb{B}^n},$$

also erhalten wir den Widerspruch

$$0 = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \Phi^*\omega = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \omega \overset{18.1}{=} \int_{\mathbb{B}^n} \mathrm{d}\omega = \int_{\mathbb{B}^n} \mathrm{d}x_1\dots\,\mathrm{d}x_n = \mathrm{vol}(\mathbb{B}^n).$$

Folglich kann es kein solches Φ geben. ∎

Korollar 18.6 (Brouwer'scher Fixpunktsatz)**.** Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ der abgeschlossenen Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ in sich besitzt mindestens einen Fixpunkt.

Beweis. (1) Durch Approximationsargumente[41] wird der stetige Fall auf den Fall von Polynomen zurückgeführt. Da Polynome beliebig oft differenzierbar sind, sind sie insbesondere zweimal stetig differenzierbar.

(2) Für zweimal stetig differenzierbares $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ ergibt sich die Behauptung aus dem Retraktionssatz wie folgt: Wenn f keinen Fixpunkt hat, definiere eine Abbildung Φ, wobei $\Phi(x)$ der Schnittpunkt von $\overrightarrow{f(x)x}$ mit $\partial\mathbb{B}^n$ sei. Insbesondere ist $\Phi(x) = x$ für $x \in \partial\mathbb{B}^n$. Dann hat Φ die Eigenschaften aus dem Retraktionssatz, kann also nicht existieren, also muss f einen Fixpunkt haben. □

Wir wollen nun noch den allgemeinen Satz von Stokes (Satz 18.1) im Fall $n = 3$ auf die "klassische" Vektoranalysis-Form umschreiben. Für $n = 3$ haben wir bereits in der Übung gesehen, dass wir p-Formen mit Funktionen (Skalarfeldern) oder mit Vektorfeldern identifizieren können:

$$\begin{aligned}
p = 0: &\quad \omega = f \\
p = 1: &\quad \omega = F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y + F_3\,\mathrm{d}z = \langle F, \mathrm{d}\vec{s}\rangle \\
p = 2: &\quad \omega = G_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + G_2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + G_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \langle G, \mathrm{d}\vec{A}\rangle \\
p = 3: &\quad \omega = g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = g\,\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

für Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$ und $F, G : U \to \mathbb{R}^3$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Laut Übung entspricht die äußere Ableitung d dann den klassischen Ableitungsoperationen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \langle \operatorname{grad} f, \mathrm{d}\vec{s}\rangle, \\
\mathrm{d}\langle F, \mathrm{d}\vec{s}\rangle &= \langle \operatorname{rot} F, \mathrm{d}\vec{A}\rangle, \\
\mathrm{d}\langle G, \mathrm{d}\vec{A}\rangle &= \operatorname{div}(G)\,\mathrm{d}V \quad \text{und} \\
\mathrm{d}g\,\mathrm{d}V &= 0.
\end{aligned}$$

Im folgenden Diagramm sind die Beziehungen zwischen den Abbildungen dargestellt. Dabei ist $\Omega^p_\infty(U)$ der Vektorraum aller beliebig oft stetig partiell differenzierbaren p-Formen auf U, $\mathcal{V}(U)$ der Vektorraum aller beliebig oft stetig partiell differenzierbaren Vektorfelder auf U und $C^\infty(U)$ der Vektorraum aller beliebig oft stetig partiell differenzierbaren Skalarfelder auf U.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0_\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^1_\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^2_\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^3_\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & 0 \\
C^\infty(U) \arrow[r, "\operatorname{grad}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{V}(U) \arrow[r, "\operatorname{rot}"] \arrow[u, "{\langle\cdot,\mathrm{d}\vec{s}\rangle}"'] & \mathcal{V}(U) \arrow[r, "\operatorname{div}"] \arrow[u, "{\langle\cdot,\mathrm{d}\vec{A}\rangle}"'] & C^\infty(U) \arrow[r] \arrow[u, "\cdot\,\mathrm{d}V"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Wir betrachten jetzt eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ wie im Satz von Stokes und interpretieren letzteren gemäß der obigen Identifikationen.

(1) Im Fall $k = 1$ entspricht M im Wesentlichen einer Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Der Satz von Stokes ergibt dann das "gradient theorem" für Wegintegrale, welches wir sowohl in der Übung als auch in der Übung zur Analysis II bereits gesehen haben:

$$\int_\gamma \langle \operatorname{grad} f, \mathrm{d}\vec{s}\rangle = \int_\gamma \mathrm{d}f \overset{18.1}{=} \int_{\partial\gamma} f = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

[41] Genauer: Mit dem *Weierstraß'schen Approximationssatz.*

(2) Im Fall $k = 2$ ist $M \subseteq \mathbb{R}^3$ zweidimensional und ∂M eindimensional (oder leer). Ist $\omega = \langle F, \mathrm{d}\vec{s}\rangle$ eine 1-Form, so ist $\mathrm{d}\omega = \langle \operatorname{rot} F, \mathrm{d}\vec{A}\rangle$ eine 2-Form und wir erhalten den klassischen Satz von Stokes:

$$\int_{\partial M} \langle F, \mathrm{d}\vec{s}\rangle = \int_{\partial M} \omega \overset{18.1}{=} \int_M \mathrm{d}\omega = \int_M \langle \operatorname{rot} F, \mathrm{d}\vec{A}\rangle \overset{15.2}{=} \int_M \langle \operatorname{rot} F(\eta), n(\eta)\rangle \,\mathrm{d}\operatorname{vol}(\eta),$$

wobei $n(\eta)$ ein Normalenvektor zu M ist.

(3) Im Fall $k = 3$ ist $M \subseteq \mathbb{R}^3$ dreidimensional und ∂M zweidimensional (oder leer). Ist $\omega = \langle G, \mathrm{d}\vec{A}\rangle$ eine 2-Form, so ist $\mathrm{d}\omega = \operatorname{div}(G)\,\mathrm{d}V$ eine 3-Form und wir erhalten den Satz von Gauß:

$$\int_M \operatorname{div}(G)\,\mathrm{d}V = \int_M \mathrm{d}\omega \overset{18.1}{=} \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \langle G, \mathrm{d}\vec{A}\rangle \overset{15.2}{=} \int_{\partial M} \langle G(\eta), n(\eta)\rangle \,\mathrm{d}\operatorname{vol}(\eta).$$

19. De Rham Kohomologie

Konvention. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. In diesem Kapitel bezeichnen wir (im Gegensatz zu Definition 10.9) mit $\Omega^p(U)$ den Vektorraum aller *glatten* (also beliebig oft differenzierbaren) p-Formen auf U. Der Fall $p = 0$ entspricht den glatten Funktionen $U \to \mathbb{R}$.

Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Mit dem Ableitungsoperator

$$\Omega^p(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{p+1}(M)$$

haben wir dann einen sogenannten *Ko-Kettenkomplex*

$$0 \to \Omega(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \dots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^k(M) \to 0,$$

das heißt es gilt überall $\mathrm{d}^2 = 0$. Ist also $\omega = \mathrm{d}\alpha$, so folgt $\mathrm{d}\omega = 0$. Äquivalenterweise gilt

$$\operatorname{Bild}\big(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)\big) \subseteq \operatorname{Kern}\big(\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)\big),$$

wobei die Inklusion strikt sein kann. Falls sogar die Gleichheit gilt, heißt der Komplex an dieser Stelle *exakt*. Nach dem Lemma von Poincaré (Lemma 12.5) gilt dies für alle p für sternförmige Gebiete, also zum Beispiel für $M = \mathbb{R}^2$. Sternförmige Gebiete sind topologisch trivial; falls die Topologie von M nicht trivial ist, so enthält die Abweichung von Bild und Kern Information über die Topologie von M.

Zunächst betrachten wir als Beispiel $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. In Beispiel 12.3 haben wir gesehen, dass

$$\omega_0 := \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

geschlossen ist, also $\mathrm{d}\omega_0 = 0$ erfüllt, aber nicht exakt ist: Es gibt keine 0-Form α mit $\omega_0 = \mathrm{d}\alpha$. Somit gilt

$$\omega_0 \in \operatorname{Kern}\big(\mathrm{d} : \Omega^1(M) \to \Omega^2(M)\big), \quad \text{aber} \quad \omega_0 \notin \operatorname{Bild}\big(\mathrm{d} : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)\big).$$

Es stellt sich nun die Frage, wie viele verschiedene geschlossene aber nicht exakte ω es gibt.

Zunächst gibt es triviale Variationen von ω_0: Ist $\alpha \in \Omega^0(M)$, so gilt für

$$\omega_1 := \omega_0 + \mathrm{d}\alpha$$

schon

$$\mathrm{d}\omega_1 = \mathrm{d}\omega_0 + \mathrm{d}^2\alpha = 0 + 0 = 0.$$

Außerdem ist ω_1 nicht exakt: Gäbe es ein $\beta \in \Omega^0(M)$ mit $\omega_1 = \mathrm{d}\beta$, dann wäre auch

$$\omega_0 = \omega_1 - \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}(\beta - \alpha)$$

exakt. Somit hat jedes $\omega_1 = \omega_0 + \mathrm{d}\alpha$ die gleichen Eigenschaften (geschlossen, aber nicht exakt) wie ω_0, aber diese ω_1 sind nur triviale Modifikationen von ω_0:

$$\omega_1 \mathrel{\hat{=}} \omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1 - \omega_0 = \mathrm{d}\alpha \in \operatorname{Bild}(\mathrm{d}).$$

Um dies zu formalisieren gehen wir über zum Quotienten

$$\operatorname{Kern}(\mathrm{d}) / \operatorname{Bild}(\mathrm{d})$$

und bezeichnen die Äquivalenzklasse von ω mit $[\omega]$. Dann gilt

$$[\omega_0 + \mathrm{d}\alpha] = [\omega_0] \neq 0.$$

Obige Frage nach der Anzahl der geschlossenen, aber nicht exakten ω können wir nun präzisieren als die Frage nach der Größe von $\operatorname{Kern}(\mathrm{d})/\operatorname{Bild}(\mathrm{d})$.

Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ mit $\mathrm{d}\omega = 0$. Betrachte zwei einfache geschlossene Kurven γ_1 und γ_2, die 0 umschließen, und bezeichne mit Γ das von γ_1 und γ_2 begrenzte Gebiet. Dann gilt mit Stokes

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\partial\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} \mathrm{d}\omega = 0,$$

also

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Das Integral von ω über eine solche geschlossen Kurve um die 0 ist also von der speziellen Wahl der Kurve unabhängig. Wir können deshalb als Kurve γ den Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ wählen.[42]

Lemma 19.1. Sei $\gamma = \mathbb{S}^1$. Die Form $\omega \in \Omega^1(M)$ ist genau dann exakt, wenn $\int_\gamma \omega = 0$.

Beweis. Sei zunächst ω exakt, also $\omega = \mathrm{d}\alpha$ für ein $\alpha \in \Omega^0(M)$. Dann gilt mit Stokes

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial\gamma} \alpha = 0,$$

da $\partial\gamma = \emptyset$.

Sei nun andererseits $\int_\gamma \omega = 0$; wir versuchen, eine Stammfunktion α durch Integrieren zu finden. Dazu fixieren wir einen beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in M$ und definieren

$$\alpha(x) := \int_{\gamma_x} \omega,$$

wobei γ_x eine Kurve zwischen x_0 und x ist. Diese Definition ist nach unserer Voraussetzung unabhängig von der gewählten Kurve.[43] Man sieht dann leicht, dass $\mathrm{d}\alpha = \omega$ gilt. $\square$

Für unser ω_0 haben wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} \omega_0 = \int_\gamma \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin(t)\cdot\big(-\sin(t)\big)\mathrm{d}t + \cos(t)\cdot\cos(t)\mathrm{d}t}{\sin^2(t)+\cos^2(t)} \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Lemma 19.2. Jede geschlossene 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ ist von der Form

$$\omega = \lambda\omega_0 + \mathrm{d}\alpha \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \alpha \in \Omega^0(M).$$

[42] Wir identifizieren $\mathbb{S}^1$ mit der "Standard-Parametrisierung" $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$.

[43] Sind γ_x und $\tilde{\gamma}_x$ zwei solche Kurven, so kann man sie zu einem geschlossenen Weg $\hat{\gamma}_x$ zusammensetzen und es reicht zu zeigen, dass das Integral über $\hat{\gamma}_x$ verschwindet. Wird 0 nicht von $\hat{\gamma}_x$ umschlossen, gilt dies sowieso, da wir dann in einem sternförmigen Teilgebiet sind. Wird 0 von $\hat{\gamma}_x$ umschlossen, so gilt die Aussage für den Einheitskreis nach Voraussetzung und wir haben die Unabhängigkeit von der betrachteten geschlossenen Kurve eben gezeigt.

Beweis. Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ mit $\mathrm{d}\omega = 0$. Setze

$$\lambda := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\omega \quad \text{und} \quad \tilde{\omega} := \omega - \lambda\omega_0.$$

Dann gilt

$$\int_{\mathbb{S}^1}\tilde{\omega} = \underbrace{\int_{\mathbb{S}^1}\omega}_{2\pi\lambda} - \lambda\underbrace{\int_{\mathbb{S}^1}\omega_0}_{2\pi} = 0.$$

Somit ist $\tilde{\omega}$ exakt, also $\tilde{\omega} = \mathrm{d}\alpha$ für ein $\alpha \in \Omega^0(M)$. Damit haben wir

$$\omega = \tilde{\omega} + \lambda\omega_0 = \mathrm{d}\alpha + \lambda\omega_0.$$

□

Somit gilt

$$\frac{\mathrm{Kern}(\mathrm{d} : \Omega^1(M) \to \Omega^2(M))}{\mathrm{Bild}(\mathrm{d} : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M))} \cong \mathbb{R}\omega_0,$$

das heißt der Quotient ist eindimensional mit Basis ω_0.

Nun kehren wir zurück zum allgemeinen Fall.

Definition 19.3. Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die p-te *de Rham Kohomologie* ist der Vektorraum

$$H^p(M) := \frac{\mathrm{Kern}(\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))}{\mathrm{Bild}(\mathrm{d} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))}$$

mit der Quotientenabbildung

$$\{\Omega^p(M) \mid \mathrm{d}\omega = 0\} \to H^p(M), \quad \omega \mapsto [\omega].$$

Die Restklasse $[\omega]$ heißt *Kohomologieklasse* von ω, die Dimension

$$b^p(M) := \dim H^p(M)$$

heißt die *p-te Betti-Zahl* von M. Die de Rham Kohomologie von M ist dann

$$H^*(M) := \bigoplus_p H^p(M).$$

Dabei ist $H^*(M)$ nicht nur ein Vektorraum, sondern wird mit dem äußeren Produkt $\wedge$ zu einer Algebra. Dazu definieren wir

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta].$$

Dies ist wohldefiniert, da für $\alpha \in \Omega^p(M)$ und $\beta \in \Omega^q(M)$ mit $\mathrm{d}\alpha = 0 = \mathrm{d}\beta$ laut Satz 11.5 schon

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \underbrace{\mathrm{d}\alpha}_{=0} \wedge \beta + (-1)^p\alpha \wedge \underbrace{\mathrm{d}\beta}_{=0} = 0$$

gilt, und unabhängig vom gewählten Repräsentanten, da für alle $\alpha \in \Omega^p(M)$, $\beta \in \Omega^q(M)$ und $\gamma \in \Omega^{p-1}(M)$

$$(\alpha + \mathrm{d}\gamma) \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + \mathrm{d}\gamma \wedge \beta + \underbrace{\gamma \wedge \mathrm{d}\beta}_{=0} = \alpha \wedge \beta + \mathrm{d}(\gamma \wedge \beta)$$

und somit $[(\alpha + \mathrm{d}\gamma) \wedge \beta] = [\alpha + \beta]$ gilt (und analog für einen anderen Vertreter von $[\beta]$).

Weiterhin induzieren glatte Abbildungen $f : M \to N$ lineare Abbildungen

$$f^* : H^p(N) \to H^p(M), \quad [\omega] \mapsto f^*[\omega] := [f^*\omega].$$

Ist $\mathrm{d}\omega = 0$, so gilt $\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\omega) = 0$ und für beliebige $\omega \in \Omega^p(M)$ und $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ gilt

$$f^*(\omega + \mathrm{d}\alpha) = f^*\omega + f^*(\mathrm{d}\alpha) = f^*\omega + \mathrm{d}(f^*\alpha),$$

also $[f^*(\omega + \mathrm{d}\alpha)] = [f^*\omega]$ und somit die Vertreterunabhängigkeit.

Man hat die wichtige *Homotopieinvarianz* der Kohomologie!

Definition 19.4. Zwei glatte Funktionen $f, g : M \to N$ heißen *homotop*, falls es eine glatte Funktion $h : M \times [0, 1] \to N$ gibt mit

$$h(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad h(x, 1) = g(x).$$

Wir schreiben in diesem Fall $f \sim g$.

Satz 19.5. Sind f und g homotop als Funktionen $M \to N$, so gilt für alle p schon $f^* = g^*$ als Funktionen $H^p(N) \to H^p(M)$.

Das Rechnen mit (Ko-)Kettenkomplexen und Homologien wird in der homologischen Algebra systematisiert. Diese wurde im wesentlichen im Rahmen der Topologie eingeführt. Die de Rham Kohomologie gibt dem Ganzen eine analytische Komponente und verbindet Analysis und Topologie. Die Weiterverfolgung solcher Zusammenhänge zwischen Topologie und Analysis gipfelt in einigen der tiefsten Resultate der modernen Mathematik, wie zum Beispiel dem Indexsatz von Atiyah und Singer.

Dramatis personae

Index

Literatur

[Els18] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2018. DOI: 10.1007/978-3-662-57939-8.

[RF10] Halsey L. Royden und Patrick M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Pearson, 2010. ISBN: 9780131437470.

[Rud09] Walter Rudin. *Reelle und Komplexe Analysis*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2009. ISBN: 9783486591866.