Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2019/2020 **Blatt 9** **20.12.2019**

Aufgabe 21 *Magnetfeld eines Kreisringes*
Auf einem Kreisring mit Radius r_0 in der x-y-Ebene um den Ursprung fließt ein Strom I.

a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ in Zylinderkoordinaten ρ, φ, z und im begleitenden Dreibein $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_z$ ab. Wie sieht die Stromdichte in Kugelkoordinaten im entsprechenden begleitenden Dreibein aus?

(1 *Punkt*)

b) Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x})$ dieser Stromverteilung und zeigen Sie, dass es auf die Form

$$\vec{A}(r,\theta) = \frac{I r_0}{c} \vec{e}_\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi' d\phi'}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \sin\theta \cos\phi'}}$$

gebracht werden kann. **Hinweis:** Verwenden Sie Kugelkoordinaten. Da es sich um ein rotationssymmetrisches Problem handelt, wählen Sie praktischerweise $\phi = 0$ für den Aufpunkt $\vec{x}$.

(1 *Punkt*)

c) Die Integration von $\vec{A}(r,\theta)$ führt auf elliptische Integrale. Für große Abstände von der Stromverteilung kann ausgenutzt werden, dass $r_0/r \ll 1$. Entwickeln Sie den Integranten bis zur ersten Ordnung in r_0/r und führen Sie dann die Integration aus. Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ in dieser Näherung.

(1 *Punkt*)

d) Vergleichen Sie das Vektorpotential des Kreisstromes in der Näherung $r_0/r \ll 1$ mit dem Ausdruck für das Vektorpotential eines magnetischen Dipols

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Was folgt daraus?

(1 *Punkt*)

e) Zeigen Sie, dass

$$\vec{B}(z) = \frac{I r_0^2}{c} \frac{2\pi}{(z^2 + r_0^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

für beliebige Punkte auf der z-Achse ist.

(1 *Punkt*)

f) Betrachten Sie eine Spule der Länge L und Windungsdichte n mit Symmetrieachse entlang der z-Achse und Spulenmittelpunkt am Ursprung. Berechnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse die magnetische Induktion

$$\vec{B}(z) = \frac{2\pi I}{c} n \vec{e}_z (\cos \Theta_1 + \cos \Theta_2)$$

der Spule auf der z-Achse. Hierbei ist Θ_1 (Θ_2) der Winkel zwischen der z-Achse und der Verbindungslinie von $(0,0,z)^T$ mit einem Punkt auf der äußersten Leiterschleife bei $-L/2$ ($L/2$). Was ergibt sich für $L \to \infty$?

(2 *Punkte*)

Aufgabe 22 *Magnetfeld einer rotierenden Hohlkugel*

Auf der Kugeloberfläche einer Hohlkugel mit Radius R ist die Ladung Q homogen verteilt. Die Hohlkugel dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine durch den Kugelmittelpunkt laufende Achse.

a) Bestimmen Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ der Hohlkugel in Kugelkoordinaten. Zeigen Sie damit, dass die Stromdichte die Form

$$\vec{j}(\vec{x}) = \sigma(\vec{\omega} \times \vec{x}) \delta(r - R)$$

hat ($r = |\vec{x}|$). Bestimmen Sie σ.

(1 *Punkt*)

b) Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ der rotierenden Kugel und bringen Sie Ihr Ergebnis auf die Form

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{Q}{3Rc} (\vec{\omega} \times \vec{x}) f(r)$$

wobei innerhalb der Kugel $f(r) = 1$ und außerhalb $f(r) = R^3/r^3$ ist. **Hinweis:** Legen Sie die z'-Achse der auftretenden Integration in Richtung des Aufpunktes $\vec{x}$.

(2 *Punkte*)

c) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{x})$ innerhalb und außerhalb der Kugel. Skizzieren oder plotten Sie das $\vec{B}$-Feld im gesamten Raum.

(2 *Punkte*)