Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia

WS 2018-2019 **Blatt 9** **13.12.2018**

Aufgabe 39 *Gaußsche Eliminationsverfahren*

Verwenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren um die folgenden linearen Gleichungssysteme zu lösen.

a)

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$$

(*1 Punkt*)

b)

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = -3 \\ 2x + 3y + z = -4 \\ 3x + 8y - 3z = -5 \end{cases}$$

(*1 Punkt*)

c) Bestimmen Sie für das folgenden Gleichungssystem alle Lösungen in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x + 2y + z = 6 \\ x + y + kz = 4 \end{cases}$$

(*2 Punkte*)

Aufgabe 40 *Injektivität, Surjektivität, Bijektivität*

Definitionen: Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

- *surjektiv*, sofern Bildmenge $f(A)$ und Zielmenge B identisch sind. Das heißt, dass jedes Element der Zielmenge mindestens ein Urbild in A besitzt.
- *injektiv*, falls jedes Element der Zielmenge höchstens ein Urbild in A besitzt.
- *bijektiv*, falls die Abbildung injektiv und surjektiv ist.

Prüfen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Falls die Funktion bijektiv ist, bestimmen Sie die Inverse.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$. (*1 Punkt*)

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$. (*1 Punkt*)

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x$. *(1 Punkt)*

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$. *(1 Punkt)*

e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, f ist linear, $f(0,0,1) = (1,2,4)$, $f(0,1,1) = (1,2,2)$, $f(1,1,1) = (0,0,1)$. *(2 Punkte)*

f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f ist linear, $f(0,1) = (1,2)$, $f(1,1) = (2,1)$. *(2 Punkte)*

g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x+3z, 2y+z, x+y+2z)$. *(2 Punkte)*

h) Bestimmen Sie für welche $k \in \mathbb{R}$ die folgende Funktion injektiv, surjektiv, oder bijektiv ist. Geben sie ggf. die Inverse an.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ky \\ kx+y \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 41 *Lineare Abbildungen*

a) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass wenn f invertierbar ist, dann ist auch die inverse Abbildung f^{-1} linear. *(2 Punkte)*

b) Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix bestehend aus den Spaltenvektoren v und w. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn v und w linear unabhängig sind.

(2 Punkte)

c) Gegeben sei $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f_1(1,0) = (1,2,0)$ und $f_1(0,1) = (0,-1,-1)$. Stellen sie f_1 als Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(f_1)$ dar, wählen Sie dabei die Basen $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ des $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{D} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ des $\mathbb{R}^3$. *(2 Punkte)*

d) Gegeben sei $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f_2(1,0,0) = 1$, $f_2(0,1,0) = -1$ und $f_2(1,1,1) = 2$. Stellen sie f_2 als Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(f_2)$ dar, wählen Sie dabei die Basen $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(2,0,1)\}$ des $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{D} = \{(2)\}$ des $\mathbb{R}^1$. *(2 Punkte)*