Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia

WS 2018-2019 **Blatt 7** **29.11.2018**

Aufgabe 31 *Vektoren im $\mathbb{R}^3$*

Überprüfen Sie die Vektoren der folgenden Mengen auf lineare Unabhängigkeit und, wenn dies der Fall ist, ob sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden :

a)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(*1 Punkt*)

b)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(*1 Punkt*)

c)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2\ln 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{100!} \\ \sin 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 45 \\ 102 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(*1 Punkt*)

d)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(*1 Punkt*)

e)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(*1 Punkt*)

f) Betrachten Sie die Mengen d) und e). Sollte die Menge aus linear unabhängigen Vektoren bestehen, dann vervollständigen Sie die Menge zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$. Diskutieren Sie außerdem wie viele Vektoren man zur Vervollständigung der Menge benutzen kann, wie viele Vektoren mit Betrag eins können zur Vervollständigung der Menge benutzen werden, und wie viele Vektoren können zur Vervollständigung der Menge benutzt werden, die Betrag 1 haben und orthogonal zu den anderen Vektoren der Menge sind. (*2 Punkte*)

Aufgabe 32 *Lineare Abbildungen*

Seien V und W zwei Vektorräume über den gleichen Körper $\mathbb{K}$. Eine Funktion $f : V \to W$ wird als lineare Abbildung bezeichnet, wenn für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ und ein beliebiger Skalar $c \in \mathbb{K}$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$,
- $f(c\boldsymbol{u}) = cf(\boldsymbol{u})$.

a) Zeigen Sie, wenn die Funktion f für jedes Element einer Basis $\mathcal{B}$ von V definiert ist, dann ist f auch für jeden Vektor $\boldsymbol{u} \in V$ definiert. *(3 Punkte)*

b) Sei $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, wobei $f_1(1, 0) = (1, 2, 0)$ und $f_1(0, 1) = (0, -1, -1)$ gilt. Berechnen Sie:

- $f_1(1, -1)$,
- $f_1(3, -1)$.

(1 Punkt)

c) Sei $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, wobei $f_2(1, 0, 0) = 1$, $f_2(0, 1, 0) = -1$ und $f_2(1, 1, 1) = 2$ gilt. Berechnen Sie:

- $f_2(1, -1, 1)$,
- $f_2(3, 1, 2)$.

(1 Punkt)

Aufgabe 33 *Komplexe Zahlen - II*

Betrachten Sie die komplexe Zahl

$$z = a + ib = re^{i\theta}, \quad i = \sqrt{-1}$$

wobei

$$a = \mathrm{Re}\{z\},$$
$$b = \mathrm{Im}\{z\}$$

und

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan \frac{b}{a} \end{cases} \quad \text{oder äquivalent} \quad \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

gilt. Berechnen Sie a, b, r, θ für die folgenden komplexen Zahlen

a) $z = -1$ *(0.5 Punkte)*

b) $z = (-i)^3$ *(0.5 Punkte)*

c) $z = (-i)^{701}$ *(0.5 Punkte)*

d) $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$ *(0.5 Punkte)*

e) $z = 8(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$ *(1 Punkt)*

f) $z = \frac{-\sqrt{\frac{3}{4}}+i\frac{1}{2}}{(-3+3\sqrt{3}i)} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ *(1 Punkt)*

g) $z = 2^{\frac{\sqrt{2}}{1+i}}$ *(2 Punkte)*

Aufgabe 34 *Bonusaufgabe: Polynome*

Betrachten Sie die Polynome $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass sie einen Vektorraum bilden. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass die Polynome vom Grad $m \leq n$ einen Teilraum bilden. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass die Potenzen $p_k = x^k$, $(k = 0, \ldots, n)$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ bilden. Ist $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ eine Basis? *(2 Punkte)*

d) Bilden die Polynome $a_1(x) = 1 + x + x^2$ und $a_2(x) = 3x^2 - 2$ eine Basis des Vektorraums aller Polynome vom Grad $n \leq 2$? *(1 Punkt)*

Bonusaufgaben ermöglichen das Sammeln von zusätzlichen Punkten um die Grenze von 50% *an Votierpunkten zu erreichen.*