# Übung zur Vorlesung
# Theoretische Physik Ia

**WS 2018-2019** **Blatt 3** **31.10.2018**

## Aufgabe 12 *Integrale*

Lösen Sie die folgenden Integrale:

(a) $I(z) = \int_0^z \sin^4(x)\mathrm{d}x$ (*0.5 Punkte*)

(b) $I(z) = \int_0^z x\ln(x)\mathrm{d}x$ (*0.5 Punkte*)

(c) $I(z) = \int_0^z \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x$ (*0.5 Punkte*)

(d) $I(z) = \int_0^z \sin(x)\mathrm{e}^{\cos(x)}\mathrm{d}x$ (*0.5 Punkte*)

(e) $I(z) = \int_0^z \frac{\sin(\sqrt{\pi x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (*0.5 Punkte*)

(f) $I(z) = \int_0^z \sin^3(x)\cos(x)\mathrm{d}x$ (*0.5 Punkte*)

## Aufgabe 13 *Uneigentliche Integrale*

Lösen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

a)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

(*0.5 Punkte*)

b)

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\mathrm{d}x, \text{ for } \alpha \in \mathbb{R} \text{ with } \alpha > 1$$

(*0.5 Punkte*)

c)

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\mathrm{d}x$$

(*1 Punkt*)

d)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

(*1 Punkt*)

e)

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\mathrm{d}x$$

(*1 Punkt*)

## Aufgabe 14 *Partialbruchzerlegung*

Benutzen Sie die Methode der Partialbruchzerlegung um die Integral

a) $I(z) = \int_0^z \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)^2}\mathrm{d}x$ *(1 Punkt)*

b) $I(z) = \int_0^z \frac{x+1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ *(1 Punkt)*

zu lösen. Die Partialbruchzerlegung ist an dem folgenden Beispiel vorgeführt.

**Beispiel**: $I(z) = \int_0^z \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}\mathrm{d}x$

Es gilt

$$f(x) = \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} = \frac{x+2}{(x-3)(x-1)(x+1)}.$$

Für die Partialbruchzerlegung machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} f(x) := \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} &= \frac{A(x-1)(x+1) + B(x-3)(x+1) + C(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (-2B-4C)x + (-A-3B+3C)}{(x-3)(x-1)(x+1)}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten $A, B$ und $C$:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -2B-4C &= 1 \\ -A-3B+3C &= 2. \end{aligned}$$

Das Lösen dieses Gleichungssystems liefert $A = \frac{5}{8}$, $B = -\frac{3}{4}$ und $C = \frac{1}{8}$. Somit lässt sich das Integral wie folgt lösen:

$$\int_0^z \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}\mathrm{d}x = \int_0^z \frac{\frac{5}{8}}{x-3} + \frac{-\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{8}}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\ln\left|1-\frac{1}{3}z\right| - \frac{3}{4}\ln|1-z| + \frac{1}{8}\ln|1+z|.$$

## Aufgabe 15 *Ungerade Funktion*

Sei $f$ eine ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass

$$\int_{-z}^{z} \mathrm{d}x\ f(x) = 0$$

gilt für alle $z \in \mathbb{R}$. Was gilt im Grenzfall $z \to \infty$?
Bestimmen Sie mit dieser Beziehung den Wert des Integrals

$$\int_{-z}^{z} \mathrm{d}x\ x^{2k-1}\mathrm{e}^{-x^2}$$

mit $k \in \mathbb{N}$. *(2 Punkte)*

## Aufgabe 16 *Das Gaußintegral*

Es sei $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ die sogenannte Gaußfunktion (diese wird ihnen im Studium noch sehr häufig begegnen!). Diese besitzt trotz ihrer scheinbar einfachen Gestalt keine analytisch darstellbare Stammfunktion. Dennoch lässt sich zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

gilt. Diese Beziehung dürfen sie im Folgenden benutzen. Berechnen Sie nun die Integrale

a)
$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x \ \mathrm{e}^{-x^2}$$
*(0.5 Punkte)*

b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \mathrm{e}^{-ax^2} \text{ mit } a > 0$$
*(0.5 Punkte)*

c)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \mathrm{e}^{-ax^2+bx+c} \text{ mit } a > 0 \text{ und } b, c \in \mathbb{R}$$
*(1 Punkt)*

d)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ x^{2k}\mathrm{e}^{-x^2} \text{ mit k } \in \mathbb{N}$$
*(2 Punkte)*

**Hinweis:** Was passiert wenn man $\mathrm{e}^{-ax^2}$ nach $a$ ableitet?

## Aufgabe 17 *Näherungen*

Nähern Sie folgende Funktionen mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung bis zur 3. Ordnung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

a) $f_1(x) = \ln(1 + x)$ *(1 Punkt)*

b) $f_2(x) = (1 + x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ *(1 Punkt)*

c) $f_3(x) = \sqrt{1 + x^2}$ *(1 Punkt)*

**Aufgabe 18** *Integration mit der Regel von de l'Hôpital*

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen die bis auf einen (möglicherweise existierenden) Punkt $c$ auf ganz $(a, b)$ differenzierbar sind, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$, und $-\infty \leq a \leq c \leq b \leq +\infty$ gilt. Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq c$ und

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = +\infty.$$

Wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

existiert, dann gilt

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$

(*1 Punkt*)

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + x}$$

(*1 Punkt*)

c)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

(*1 Punkt*)

d)

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x$$

(*1 Punkt*)

e)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

(*1 Punkt*)

f)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

(*1 Punkt*)

g)

$$\lim_{x \to 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

*(1 Punkt)*

h)

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x^2)^{2018} - (1-x^2)^{2018}}{\cos\left(e^x - 1\right) - 1}$$

*(1 Punkt)*