Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik Ia

WS 2018-2019 **Blatt 12** **18.01.2019**

Aufgabe 49 *Konservatives Feld*

Weisen Sie nach, dass das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{xy}\sin z + x + y \\ xe^{xy}\sin z + x + y - z \\ e^{xy}\cos z - y + z \end{pmatrix}$$

konservativ ist und bestimmen Sie ein Potential. (*2 Punkte*)

Aufgabe 50 *Beweise über Flächen*

a) Eine zweidimensionale Fläche lässt sich angeben, indem man die z-Koordinate eines darauf befindlichen Punktes als Funktion seiner beiden anderen Koordinaten x und y angibt. Man legt also fest $z = \phi(x,y)$ mit einer Funktion $\phi : U \to \mathbb{R}$, wobei U das Gebiet ist, innerhalb dessen x und y variieren.
Zeigen Sie, dass gilt:
Für die Parametrisierung eines Graphen $\boldsymbol{\Phi}(x,y) = (x, y, \phi(x,y))$ über dem Parametergebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ ergibt sich als Flächeninhalt

$$A = \int_U \sqrt{1 + \|\boldsymbol{\nabla}\phi\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

wobei ∇ der zweidimensionale Gradient ist, der nach x und y ableitet. (*2 Punkte*)

b) Zeigen Sie:
Die durch die Parametrisierung

$$(u,v) \to \begin{pmatrix} r(u)\cos v \\ r(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}, \quad a < u < b,\ 0 < v < 2\pi$$

gegebene (geschlitzte) Rotationsfläche hat den Flächeninhalt

$$A = 2\pi \int_a^b r(u)\sqrt{\dot{r}^2(u) + \dot{z}^2(u)}\mathrm{d}u.$$

(*2 Punkte*)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Sphärenkappe mit Radius r und Höhe h:

$$\{(x,y,z) | \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r,\ z > r - h\}.$$

(*2 Punkte*)

Hinweis: Hier müssen Sie sich zunächst selbst die Parametrisierung überlegen.

Aufgabe 51 *Normalenvektor*

Berechnen Sie den Normalenvektor $\partial_r \mathbf{\Phi} \times \partial_\phi \mathbf{\Phi}$ für die Parametrisierung $\mathbf{\Phi}(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, \phi)$, $(0 < r < 1, 0 < \phi < 2\pi)$ einer Wendelfläche und machen Sie eine Skizze. (*2 Punkte*)

Aufgabe 52 *Integralspaß mit Gauß und Stokes*

a) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sei die Pyramide mit der Spitze $(0, 0, 1)$ und dem Quadrat $Q = \{(x, y, 0) : |x| < 1, |y| < 1\}$ als Grundseite. Ferner sei $\boldsymbol{v}$ das Vektorfeld $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (x^3, z^4, y^2)$. Berechnen Sie zunächst das vektorielle Flächenintegral $\int_Q \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ über die quadratische Grundfläche und dann mit Hilfe des Gaußschen Satzes das Integral $\int_M \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ über die Mantelfläche $M = A(\Omega) \setminus Q$ (zu verstehen als Summe der Integrale über die vier Mantelseiten, Notation $A(\Omega)$ wird unten nochmal erläutert). (*4 Punkte*)

b) Berechnen Sie das vektorielle Oberflächenintegral der Rotation des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (-x^2 y, x^3 + z^2, \arctan e^{x+y+z})$ über die Fläche $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\}$ mithilfe des Satzes von Stokes, wobei wir den Normalenvektor der Fläche nach außen zeigen lassen.
(*3 Punkte*)

Hinweis:
Integralsatz von Gauß

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}V = \int_{A(V)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A},$$

wobei $A(V)$ die geschlossene Oberfläche ist, die das Volumen V umgibt.
Integralsatz von Stokes

$$\int_A \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{C(A)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

wobei $C(A)$ eine geschlossene Kurve ist, welche die Fläche A berandet.