Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

WS 2012/2013 **Blatt 12** **17.01.2013**

Aufgabe 35 *Brechung ebener Wellen*

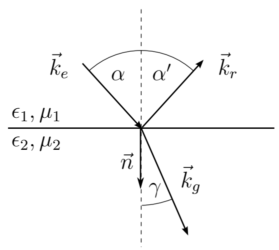
Wir betrachten eine monochromatische ebene Welle beschrieben durch

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\right], \quad \vec{B}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{B}}e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\right]$$

Verwenden Sie für die Rechnung die komplexe Darstellung der Felder.

a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld und dem Feld der magnetischen Induktion ab. *(1 Punkt)*

b) Auf eine Grenzfläche mit Normalenvektor $\vec{n}$ zwischen zwei Medien fällt eine elektromagnetische Welle ein und wird zum Teil gebrochen, zum Teil reflektiert.



Überlegen Sie sich, warum an der Grenzfläche zu jeder Zeit und an jedem Ort die Phasenbedingung

$$\exp[i(\vec{k}_e\vec{x} - \omega_e t)] = \exp[i(\vec{k}_r\vec{x} - \omega_r t)] = \exp[i(\vec{k}_g\vec{x} - \omega_g t)]$$

erfüllt sein muss. Die Indizes stehen für die **e**infallende, **r**eflektierte und **g**ebrochene Welle. Leiten Sie daraus $\omega_e = \omega_r = \omega_g$, $\alpha = \alpha'$ und das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}$$

ab. Die Brechzahlen n_i sind definiert als $n_i = \sqrt{\epsilon_i\mu_i}$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 36 *Polarisation ebener Wellen*

a) Zeigen Sie, dass jedem komplexen Vektor $\vec{\mathcal{E}}$ durch $\mathrm{Re}\{\vec{\mathcal{E}}\exp[-i\omega t]\}$ eine Ellipse zugeordnet werden kann, welche die Gleichung

$$\frac{x'^2}{|\vec{\epsilon}_1|^2} + \frac{y'^2}{|\vec{\epsilon}_2|^2} = 1$$

erfüllt. Hierbei sind $\vec{\epsilon}_i$ reelle Vektoren.

Anleitung: Führen Sie für den Beweis den komplexen Vektor $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_1 + i\vec{\epsilon}_2$ so ein, dass $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\epsilon}\exp[\frac{i}{2}\arg\vec{\mathcal{E}}^2]$ ist. Legen Sie dann die x'- und y'-Achse des Koordinatensystems geschickt fest. *(2 Punkte)*

b) Das elektrische Feld einer ebenen, monochromatischen elektromagnetischen Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet, kann in der Form

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(kz-\omega t)}\right]$$

mit Wellenvektor k, Frequenz ω und komplexer Amplitude $\vec{\mathcal{E}}_0$ geschrieben werden. Diskutieren Sie die Polarisation der Welle: Wann liegt lineare, zirkulare, elliptische Polarisation vor? Wie ist der Drehsinn des elektrischen Feldvektors als Funktion der Zeit bei zirkularer und elliptischer Polarisation? *(2 Punkte)*

Aufgabe 37 *Liénard-Wiechert Potentiale*

Diese Aufgabe wird in Kleingruppen (3-4 Personen) bearbeitet und eine Ausarbeitung pro Gruppe schriftlich abgegeben. Abgabetermin: 24.01.2013.

a) Ein geladenes Punkteilchen (Ladung q) bewegt sich entlang der Trajektorie $\vec{r}(t)$ mit der Geschwindigkeit $c\vec{\beta}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$. Verwenden Sie die Greensche Funktion der Wellengleichung, um für das geladene Teilchen die sogenannten Liénard-Wiechert Potentiale

$$\Phi(\vec{x},t) = \frac{q}{R(t') - \vec{R}(t')\cdot\vec{\beta}(t')}, \quad \vec{A}(\vec{x},t) = \frac{q\vec{\beta}(t')}{R(t') - \vec{R}(t')\cdot\vec{\beta}(t')}$$

abzuleiten ($R = |\vec{R}|$). In diesen Ausdrücken ist der Zusammenhang zwischen t und t' über die Retardierung $c(t - t') = R(t')$ gegeben. Der Vektor $\vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{r}(t')$ verbindet den Aufpunkt $\vec{x}$ mit dem Punkt $\vec{r}(t')$ der Trajektorie.

b) Zeigen Sie zunächst

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial t'}{\partial t} &= 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t}, & \frac{\partial t'}{\partial x_i} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial x_i}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{\vec{e}_R \cdot \vec{\beta}}{1 - \vec{e}_R \cdot \vec{\beta}}, & \frac{\partial R}{\partial x_i} &= \frac{R_i/R}{1 - \vec{e}_R \cdot \vec{\beta}}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} &= \frac{-\vec{\beta}}{1 - \vec{e}_R \cdot \vec{\beta}} & \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_i} &= \vec{e}_i + \vec{\beta}\frac{R_i/R}{1 - \vec{e}_R \cdot \vec{\beta}}
\end{aligned}
$$

und beweisen Sie damit

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}, t) &= q\left[\frac{(1-\vec{\beta}^2)(\vec{e}_R - \vec{\beta})}{R^2(1 - \vec{e}_R \cdot \vec{\beta})^3}\right] + \frac{q}{c}\left[\frac{\vec{e}_R \times \{(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{R(1 - \vec{e}_R \cdot \vec{\beta})^3}\right], \\
\vec{B}(\vec{x}, t) &= \vec{e}_r \times \vec{E}(\vec{x}, t),
\end{aligned}
$$

wobei die rechte Seite zur retardierten Zeit t' ausgewertet wird und $\vec{e}_R$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{R}$ ist.

c) Berechnen Sie

1. Die erste relativistische Korrektur der Felder einer gleichförmig bewegten Ladung q (bis Ordnung β).
2. Die Abstrahlleistung einer noch langsamen ($\beta \approx 0$) aber stark beschleunigten ($\dot{\beta} \neq 0$) Ladung.