Vorrechnen des Übungsblattes: Freitag, 16.12. und Montag 19.12.2011

18. Boltzmann-Gleichung im hydrodynamischen Regime und Lösungsansatz 0.-ter Ordnung

Ziel der Aufgabe ist die hydrodynamischen Gleichungen aus dem Lösungsansatz **0.**-ter Ordnung der Boltzmann-Gleichung abzuleiten. Dabei nehmen wir an, dass die freie Weglänge zwischen den einzelnen Stößen viel kleiner sein soll, als alle anderen charakteristischen Längenskalen, was dazu führt, dass sich das Gas lokal im Gleichgewicht befinden und dort einer Maxwell-Boltzmann Verteilung genügen sollte. In diesem Regime scheint daher $f(\vec{x},\vec{p};t) = f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t) + g(\vec{x},\vec{p};t)$ als Lösungsansatz für die Boltzmann-Gleichung sinnvoll, wobei

$$f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t) = \frac{\varrho(\vec{x},t)}{m}\cdot\left(\frac{1}{2\pi\, mk\,T(\vec{x},t)}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{(\vec{p}-m\,\vec{u}(\vec{x},t))^2}{2mk\,T(\vec{x},t)}\right]$$

und $g(\vec{x},\vec{p}_1;t)$ eine kleine Korrektur darstellt. In der lokalen Maxwell-Boltzmann Verteilung $f^{(0)}$ bezeichnet $T(\vec{x},t)$ die lokale Temperatur, $\varrho(\vec{x},t)$ die lokale Massendichte und $\vec{u}(\vec{x},t)$ die lokale, mittlere Geschwindigkeit.

(a) Zeigen Sie durch explizites Berechnen der Integrale, dass

(i) $m\int_{\mathbb{R}^3} f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t)\,d^3p = \varrho(\vec{x},t)$,

(ii) $m\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\vec{p}}{m}\right) f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t)\,d^3p = \varrho(\vec{x},t)\,\vec{u}(\vec{x},t)$,

(iii) $\varrho(\vec{x},t)\,\varepsilon(\vec{x},t) \equiv m\int_{\mathbb{R}^3}\frac{m}{2}\left(\frac{\vec{p}}{m}-\vec{u}\right)^2 f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t)\,d^3p = \frac{3}{2}\,\varrho(\vec{x},t)\,k\,T(\vec{x},t)$,

wobei $\varepsilon(\vec{x},t)$ die in Aufgabe 16 eingeführte mittlere thermische Energiedichte bezeichnet.

(4 Punkte)

(b) Verifizieren Sie mit Hilfe der in Aufgabe 16 angegebenen Definition der Boltzmann-Gleichung, dass für $f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t)$ der Stoßterm

$$\left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3p_2\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3p_1'\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3p_2'\,W(\vec{p}_1,\vec{p}_2|\vec{p}_1{}',\vec{p}_2{}')\left(f_1^{(0)\prime}f_2^{(0)\prime} - f_1^{(0)}\,f_2^{(0)}\right)$$

verschwindet.

(2 Punkte)

(c) In der Näherung 0.-ter Ordnung wird angenommen, dass $f^{(0)}(\vec{x},\vec{p}_1;t)$ eine approximative Lösung der Boltzmann-Gleichung ist, d.h.

$$\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{p_{1,i}}{m}\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial x_i} + F_i\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial p_{1,i}}\right]\approx 0\,.$$

Begründen Sie hiermit die approximative Gültigkeit der in Aufgabe 16 abgeleiteten Relationen

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{x}}(\varrho\,\vec{u})\approx 0 \tag{1}$$

$$\varrho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)u_i \approx -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\varrho}{m}F_i \tag{2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(E\,u_k + \sum_{i=1}^{3}P_{ki}\,u_i + J_k\Big)\approx\frac{\varrho}{m}\sum_{k=1}^{3}u_k\,F_k \tag{3}$$

folgt, wobei $E(\vec{x},t) = \frac{\varrho}{2}\,\vec{u}^{\,2}(\vec{x},t) + \frac{\varrho}{m}\,\varepsilon(\vec{x},t)$ die Energiedichte,

$$P_{ik}(\vec{x},t) = \varrho\,\langle\big(\tfrac{p_i}{m}-u_i\big)\big(\tfrac{p_k}{m}-u_k\big)\rangle = m\int_{\mathbb{R}^3}\big(\tfrac{p_i}{m}-u_i\big)\big(\tfrac{p_k}{m}-u_k\big)\,f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t)\,d^3p$$

den Drucktensor und

$$\vec{J}(\vec{x},t) = \frac{\varrho}{m}\left\langle\left(\frac{\vec{p}}{m}-\vec{u}\right)\frac{m}{2}\left(\frac{\vec{p}}{m}-\vec{u}\right)^2\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\vec{p}}{m}-\vec{u}\right)\frac{m}{2}\left(\frac{\vec{p}}{m}-\vec{u}\right)^2 f^{(0)}(\vec{x},\vec{p};t)\,d^3p$$

die lokale Wärmestromdichte bezeichnet.

(2 Punkte)

(d) Beweisen Sie durch Einsetzen der lokalen Maxwell-Boltzmann Verteilung $f^{(0)}$ in die obigen Ausdrücke, dass

(iv) $P_{ik}(\vec{x},t) = P(\vec{x},t)\,\delta_{ik}$ mit $P = \frac{\varrho}{m}kT$,

(v) $\vec{J}(\vec{x},t) = 0$.

(3 Punkte)

(e) Leiten Sie ausgehend von den Gleichungen (1)-(3) die folgende Entwicklungsgleichung für die mittlere thermische Energiedichte ab:

$$\frac{\varrho}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\varepsilon + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial J_i}{\partial x_i}\approx -\sum_{i,k=1}^{3}P_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,.$$

(2 Punkte)

(f) Folgern Sie mit Hilfe der Relationen (i)-(v), dass der Lösungsansatz 0.-ter Ordnung der Boltzmann-Gleichung die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen (ohne Dissipation) impliziert:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{x}}(\varrho\,\vec{u})\approx 0$$

$$\varrho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)u_i\approx -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\varrho}{m}F_i$$

$$\frac{\varrho}{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\varepsilon\approx -P\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Stellen diese Bewegungsgleichungen ein geschlossenes System von Gleichungen dar, mit denen die Dichten $\varrho(\vec{x},t)$, $\vec{u}(\vec{x},t)$ und $\varepsilon(\vec{x},t)$ eindeutig bestimmt werden können?

(2 Punkte)

19. Stirlingsche Formel

In dieser Aufgabe soll eine heuristische Ableitung der Stirlingschen Formel durchgeführt werden. Eine mathematisch stringente Herleitung finden Sie z.B. im Buch *Funktionentheorie 1* von Freitag und Busam. Ausgangspunkt unserer Herleitung ist die Integraldarstellung der Γ-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt\,.$$

Bringen Sie die Gamma-Funktion mit Hilfe der Substitution $t = x\,\tau$ (festes $x \gg 1$) auf die Form

$$\Gamma(x+1) = x e^{x\ln x} \int_0^\infty e^{x(\ln\tau - \tau)}\, d\tau\,.$$

Entwickeln Sie den Exponenten im Integrand um das Maximum der Funktion $\ln\tau - \tau$ bis zur zweiten Ordnung und begründen Sie hieraus die Stirlingsche Formel

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x .$$

(3 Punkte)

20. Volumen und Oberfläche der N-dimensionalen Kugel

In dieser Aufgabe soll das Volumen und die Oberfläche der N-dimensionalen Kugel bestimmt werden.

(a) Berechen Sie das Volumen $V_N(R)$ und die Oberfläche $\Omega_N(R)$ einer N-dimensionalen Kugel mit dem Radius R. Zeigen Sie dazu zunächst, dass

$$V_N(R) = V_N(1)\, R^N$$

gilt und begründen Sie kurz die Gültigkeit der Relation $\Omega_N(R) = \frac{dV_N(R)}{dR}$. Das Volumen $V_N(1)$ finden Sie, indem Sie

$$\int e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_N^2)}\, d^N x$$

einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Kugelkoordinaten berechnen.

(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie außerdem, dass bei großem N das Volumen fast vollständig durch die Kugelschale mit den Radien $(1-\varepsilon)R$ und R bestimmt wird ($0 < \varepsilon < 1$). Was erhält man für $\varepsilon = 0.001$ und $n = 3$, 10^3 und 10^6?

(2 Punkte)