Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2022 **Blatt 5** **20.05.2022**

Aufgabe 19 *Spin-Echo*

Betrachten Sie den Hamilton Operator

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z$$

und den Anfangszustand $|\psi(0)\rangle = (|\uparrow\rangle_z + |\downarrow\rangle_z)/\sqrt{2}$.

a) Berechnen Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$. *(0.5 Punkte)*

b) Bestimmen Sie $\langle\hat{\sigma}_x\rangle_t$, $\langle\hat{\sigma}_y\rangle_t$, $\langle\hat{\sigma}_z\rangle_t$ als Funktion von $\langle\hat{\sigma}_x\rangle_0$,$\langle\hat{\sigma}_y\rangle_0$,$\langle\hat{\sigma}_z\rangle_0$, wobei

$$\begin{aligned}\langle\hat{\sigma}_j\rangle_t &= \langle\psi(t)|\hat{\sigma}_j|\psi(t)\rangle,\\ \langle\hat{\sigma}_j\rangle_0 &= \langle\psi(0)|\hat{\sigma}_j|\psi(0)\rangle \quad j = \{x, y, z\}.\end{aligned}$$

(1 Punkt)

c) Nehmen wir nun an, dass zum Zeitpunkt t der unitäre Operator $\hat{U} = \hat{\sigma}_x$ auf den Zustand $|\psi(t)\rangle$ angewendet wird. Bestimmen Sie $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi(t)\rangle$. Zeigen Sie außerdem, dass $|\psi'\rangle$ normalisiert ist. *(1 Punkt)*

d) Ausgehend von dem Zustand $|\psi'\rangle$ lassen wir nun das System gemäß dem Hamilton Operator $\hat{H}$ für eine Zeit t entwickeln, wobei wir den Zustand zur Zeit t als $|\psi'(t)\rangle$ bezeichnen. Bestimmen den Zustand $|\psi'(t)\rangle$ und überprüfen Sie, dass $|\psi'(t)\rangle = |\psi(0)\rangle$ gilt. *(1 Punkt)*

e) Wir betracthen nun Dipole mit verschiedenen Larmorfrequenzen ω_j, wobei der Hamilton Operator eines Dipols mit Frequenz ω_j gegeben ist durch $\hat{H} = \frac{\hbar\omega_j}{2}\hat{\sigma}_z$. Der Anteil der Atome mit Frequenz ω_j sei gegeben durch $p_j \geq 0$, so dass $\sum_j p_j = 1$. Der Anfangszustand der Atome mit Frequenz ω_j ($j = 1, \ldots, n$) sei $|\psi_j(0)\rangle = (|\uparrow\rangle_z + |\downarrow\rangle_z)/\sqrt{2}$. Bestimmen Sie $\langle\hat{\sigma}_x\rangle_t$, $\langle\hat{\sigma}_y\rangle_t$, $\langle\hat{\sigma}_z\rangle_t$, wobei

$$\begin{aligned}\langle\hat{\sigma}_x\rangle_t &= \sum_j p_j\langle\psi_j(t)|\hat{\sigma}_x|\psi_j(t)\rangle,\\ \langle\hat{\sigma}_y\rangle_t &= \sum_j p_j\langle\psi_j(t)|\hat{\sigma}_y|\psi_j(t)\rangle,\\ \langle\hat{\sigma}_z\rangle_t &= \sum_j p_j\langle\psi_j(t)|\hat{\sigma}_z|\psi_j(t)\rangle.\end{aligned}$$

(1 Punkt)

f) Angenommen, das Verfahren aus Aufgabenteil c) wird nun zur Zeit t auf jeden Satz von Atomen einzeln angewendet. Bestimmen Sie die Größen $\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{2t}$, $\langle\hat{\sigma}_y\rangle_{2t}$, $\langle\hat{\sigma}_z\rangle_{2t}$ zur Zeit $2t$. *(1 Punkt)* *(1 Punkt)*

Aufgabe 20 *Paulioperatoren und Dichteoperatoren*

a) Zeigen Sie, dass alle Dichteoperatoren $\mathrm{Sp}\,(\hat{\rho}^2) \leq 1$ erfüllen. In welchem Fall gilt $\mathrm{Sp}\,(\hat{\rho}^2) = 1$? *(1 Punkt)*

b) Betrachten Sie nun ein Spinsystem. Wir definieren die vier hermiteschen Operatoren

$$\begin{aligned} \hat{W}_0 &= \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbb{1}}_2 + \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right), \\ \hat{W}_1 &= \sigma_x \hat{W}_0 \sigma_x, \quad \hat{W}_2 = \sigma_y \hat{W}_0 \sigma_y, \quad \hat{W}_3 = \sigma_z \hat{W}_0 \sigma_z. \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie dass diese auf Spur eins normiert sind, d.h. $\mathrm{Sp}\,(\hat{W}_i) = 1$ für $i = 0, \ldots, 3$ gilt, und dass sie orthogonal sind im Sinne von

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{W}_i \hat{W}_j) = 2\delta_{ij}, \quad \text{für } i, j = 1, \ldots, 3. \tag{2}$$

(1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass diese $\hat{W}_i$ vollständig sind, d.h. dass jeder Operator $\hat{\Gamma}$ als gewichtete Summe der $\hat{W}_i$, also

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{3} \gamma_i \hat{W}_i, \quad \text{mit } \gamma_i = \mathrm{Sp}\,(\hat{W}_i \hat{\Gamma}) \tag{3}$$

geschrieben werden kann. Drücken Sie $\mathrm{Sp}\,(\hat{\Gamma})$ und $\mathrm{Sp}\,(\hat{\Gamma}^\dagger \hat{\Gamma})$ durch die Koeffizienten γ_i aus. *(1 Punkt)*

d) Wenn eine System durch den Dichteoperator $\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_k r_k \hat{W}_k$ beschrieben werden kann, was ergibt sich dann für den Erwartungswert von $\hat{\Gamma}$ ausgedrückt durch die Koeffizienten γ_i und r_k? *(1 Punkt)*