Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III

SoSe 2022 **Blatt 1** **13.04.2022**

Aufgabe 1 *Stern-Gerlach Experiment 1*

Der klassischen Erwartung nach kann über den Ausgang des Stern-Gerlach Experiments folgende Aussage gemacht werden: "Die magnetischen Momente der Größe μ der Silberatome sind kontinuierlich in alle Raumrichtungen verteilt. Dies impliziert, dass auch die z-Komponente gleichverteilt ist zwischen μ und $-\mu$." Rechtfertigen Sie diese Implikation. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Stern-Gerlach Experiment 2*

Tatsächlich zeigt das Stern-Gerlach Experiment nur die zwei möglichen Werte $\pm\mu$ für μ_z.

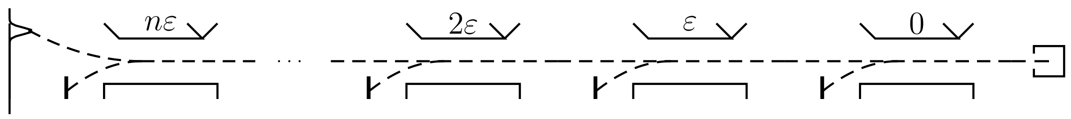
a) Welche Messwerte sind folglich möglich für μ_x^2, μ_y^2 und μ_z^2? *(1 Punkt)*

b) Und für $\vec{\mu}^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2$? *(1 Punkt)*

c) Welchen Unterschied gibt es im Vergleich mit dem klassischen Bild, in dem $\vec{\mu}$ eine festgelegte Richtung im Raum hat? *(1 Punkt)*

Aufgabe 3 *Quanten-Zeno-Effekt*

Wir betrachten eine unten abgebildete Folge von Stern-Gerlach-Apparaten, die Atome von rechts nach links durchfliegen. Der erste Apparat selektiert den "+ in z"-Strahl. "+ in z" bedeutet hier, dass Atome mit $\mu_z = +\mu$ seleltiert werden. Danach folgen n weitere Apparate, die wieder den "+"-Strahl selektieren. Diese selektieren jedoch den "+"-Stahl in eine Richtung, die der vorhergegangenen gegenüber um ε verdreht ist (d.h. der letzte Apparat schließt mit dem ersten den Winkel $\theta = n\varepsilon$ ein):



a) Wie hoch ist allgemein die Wahrscheinlichkeit, dass ein "+ in z"-Atom alle n Apparate durchfliegt? Berechnen Sie diese konkret für $n = 1, 2, 5, 15, 45, 90, 180, 360$ und den Winkel $\theta = \pi/2$. *(2 Punkte)*

b) Betrachten Sie nun für einen festen Winkel θ den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eines Passierens in diesem Grenzwert? Diskutieren Sie dieses Ergebnis. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4 *Stern-Gerlach Experiment 3*

Ein Stern-Gerlach Apparat hat zwei mögliche Einstellmöglichkeiten. Er kann entweder in z-Richtung oder in x-Richtung selektieren. Betrachten Sie die folgenden Situationen:

1. Ein Strahl von Atomen, die *halb* in "$+$ in z" und *halb* in "$-$ in z" präpariert sind.
2. Ein Strahl von Atomen, die *alle* in "$+$ in x" präpariert sind.

Kann der Apparat dazu verwendet werden die beiden Situationen zu unterscheiden? Wenn ja wie? *(2 Punkte)*

Aufgabe 5 *Stern-Gerlach Experiment 4*

Atome werden in "$+$ in z" vorselektiert. Diese Atome passieren danach einen "$+$ in x" Selektor gefolgt von einem "$+$ in z" Selektor. Wie groß ist der Anteil der Atome, die hindurchgelassen werden? *(1 Punkt)*

Aufgabe 6 *Pauli-Operatoren*

Die Pauli-Operatoren sind durch

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Operatoren mit $j, k, l \in \{x, y, z\}$ die Relationen

$$\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = \delta_{j,k} \, \mathbb{1} + i \sum_l \epsilon_{jkl} \hat{\sigma}_l \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = i \, \mathbb{1}$$

erfüllen, wobei letztere für zyklische Vertauschung der Indizes erhalten bleibt. *(2 Punkte)*

b) Beweisen Sie, dass die Operatoren $\hat{\sigma}_j$ und $\hat{S}_j = \hat{\sigma}_j/2$, $j = x, y, z$, den Antikommutator- und Kommutatorrelationen

$$\{\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k\} = 2 \, \delta_{j,k} \, \mathbb{1} \quad \text{und} \quad [\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i \sum_l \epsilon_{jkl} \hat{S}_l \ .$$

genügen. Hierbei sind der Kommutator und Antikommutator zweier Operatoren A und B durch $[A, B] = AB - BA$ und $\{A, B\} = AB + BA$ gegeben. *(2 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass für den Paulivektor $\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)^\top$ und zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{a})(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \, \hat{\vec{\sigma}} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \ .$$

Nutzen Sie diese Eigenschaft um für einen normierten Vektor $\vec{n}$

$$(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{n})^2 = 1$$

zu zeigen. *(2 Punkte)*