

Übung zur Vorlesung

Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2019

Blatt 2

18.04.2019

Dr. Schank

mit Tom Schmit, Francesco Rosati, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 26.04.19 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 5 *Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf*

Ein Teilchen der Masse m ist zwischen zwei undurchdringlichen Wänden gefangen. Der Hamiltonoperator im Ortsraum lautet

$$H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad (1)$$

dabei ist das Potential durch

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0, x \geq L \\ 0 & \text{für } 0 < x < L \end{cases}$$

gegeben mit $L > 0$.

- a) Berechnen Sie die normierten Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ und die Eigenwerte E_n ($n = 1, 2, \dots$) des Hamiltonoperators in Gl.(1) mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung. (3 Punkte)

Hinweis: Die Eigenfunktionen des Systems nehmen immer den Wert 0 an, wenn das Potential unendlich ist.

- b) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen symmetrisch oder antisymmetrisch im Bezug auf den Mittelpunkt der Box sind. Für welche n sind die Eigenfunktionen symmetrisch? (1 Punkt)
- c) Berechnen Sie die Anzahl der Nullstellen der Eigenfunktion $\psi_n(x)$ im Intervall $]0, L[$. (1 Punkt)
- d) Zeigen Sie die Relation

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}. \quad (2)$$

Benutzen Sie dabei die Definition (3) auf Blatt 1. (2 Punkte)

- e) Das Teilchen ist genau bei $x = L/2$ lokalisiert. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung der Energie den Eigenwert E_n liefert? (2 Punkte)

Aufgabe 6 *Eindimensionale Schrödinger Gleichung*

Die eindimensionale zeitabhängige Schrödinger Gleichung für ein Teilchen mit der Masse m ist gegeben durch

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t). \quad (3)$$

In dieser Aufgabe werden Sie die allgemeine Lösung dieser Schrödinger Gleichung für ein freies Teilchen ($V(x) = 0$) im kontinuierlichen Raum bestimmen.

- a) Leiten Sie zunächst die Gleichung

$$\frac{i\hbar}{\chi(t)} \frac{d\chi(t)}{dt} = \frac{1}{\phi(x)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) \right] \quad (4)$$

her unter Benutzung des Ansatzes $\psi(x, t) = \phi(x)\chi(t)$. In dieser Gleichung hängt die linke Seite nur von der Zeit t ab und die rechte Seite nur vom Ort x ab. Sie ist also nur dann erfüllt, wenn die beiden Seiten gleich ein und derselben Konstanten sind. Wählen Sie diese zu $\hbar\omega$, wobei ω die Dimension einer Frequenz besitzt. (1 Punkt)

- b) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Ort x und für die Zeit t aus Teilaufgabe a). (2 Punkte)
- c) Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung der Schrödinger Gleichung (3) für ein freies Teilchen ($V(x) = 0$) im kontinuierlichen Raum unter Benutzung des Superpositionsprinzips. (2 Punkte)