Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik III/IV für Lehramtskandidaten

SoSe 2017 **Blatt 12** **07.07.2017**

Dr. Schank
mit Luigi Giannelli, Tim Keller, Rebecca Kraus

Ihre Lösung ist in Form einer Einzelabgabe bis zum 14.07.17 um 16 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Giovanna Morigi im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen

Aufgabe 35 *Jacobi-Determinante*

Im Folgenden wird der Formalismus der Jacobi-Determinante eingeführt, der für den Umgang mit Zustandsvariablen sehr nützlich sein kann.
Es seien zwei Funktionen f, g von zwei Variablen x, y gegeben. Wenn man (f, g) als die beiden Komponenten einer vektorwertigen Funktion F von x, y auffasst, dann ist

$$DF = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x \end{bmatrix}$$

die Funktionalmatrix (Jacobi-Matrix) dieser Funktion F. Die sogenannte Jacobi-Determinante lautet

$$\frac{\partial\left(f, g\right)}{\partial\left(x, y\right)} = \det \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass man die partielle Ableitung mit Hilfe der Jacobi-Determinante als

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial\left(f, y\right)}{\partial\left(x, y\right)}$$

schreiben kann. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass die Determinante ihr Vorzeichen wechselt beim Vertauschen zweier Spalten:

$$\frac{\partial\left(f, g\right)}{\partial\left(x, y\right)} = -\frac{\partial(g, f)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial\left(f, g\right)}{\partial\left(y, x\right)} = \frac{\partial\left(g, f\right)}{\partial\left(y, x\right)}$$

(1 Punkt)

c) Hängen nun x und y von weiteren unabhängigen Variablen u und v ab, so gilt

$$\frac{\partial\left(f, g\right)}{\partial\left(x, y\right)} = \frac{\partial\left(f, g\right)}{\partial\left(u, v\right)} \cdot \frac{\partial\left(u, v\right)}{\partial\left(x, y\right)} \quad . \tag{1}$$

Zeigen Sie die Kettenregel (1). *(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial f}\right)_v} \quad .$$

(1 Punkt)

e) Wir betrachten drei Variablen, die eine Bedingung $F(x, y, z) = 0$ erfüllen. Dann hängt x von y und z ab, $x(y, z)$, und Funktionen dieser Variablen hängen nur von zwei der Variablen ab, z.B. $w(x, y)$. Zeigen Sie die Gültigket der Relation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z \quad .$$

(2 Punkte)

f) Die Größen x, y, z erfüllen die Gleichung $F(x, y, z) = 0$. Es sei w eine weitere Funktion von irgend zweier dieser Größen. Zeigen Sie die Relationen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \ .$$

(1 Punkt)

Aufgabe 36 *Phasenraumvolumen*

Das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit dem Radius R lässt sich über das Integral

$$V_n(R) = \int dV_n = \underbrace{\int dx_1 ... \int dx_n}_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2}$$

bestimmen, wobei dV_n das n-dimensionale Volumenelement in sphärischen Kugelkoordinaten bezeichnet und R den Radius der n-dimensionalen Kugel darstellt.

a) Zeigen Sie anhand des obigen Integrals, dass

$$V_n(R) = V_n(1) R^n$$

gilt, wobei $V_n(1)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie mithilfe der Gleichung aus Aufgabenteil (a) das Volumenelement dV_n in Abhängigkeit von $V_n(1)$ an. Wie kann aus dV_n das Volumen V_n berechnet werden und welche Bedeutung hat dabei der von R unabhängige Anteil? *(1 Punkt)*

c) Um nun konkret $V_n(1)$ zu bestimmen, berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 ... \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n e^{-\left(x_1^2 + ... x_n^2\right)}$$

einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Kugelkoordinaten und drücken Sie $V_n(1)$ mithilfe der Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty dt \ e^{-t} t^{x-1}$ aus. *(2 Punkte)*

d) Zeigen Sie nun, dass für das Volumen der n-dimensionalen Kugel

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma(n/2+1)}$$

gilt, wobei $n/2\Gamma(n/2) = \Gamma(n/2+1)$ ist. *(1 Punkt)*

e) Betrachten Sie ein Ensemble aus N klassischen, unterscheidbaren, nicht wechselwirkenden, eindimensionalen harmonischen Oszillatoren mit einer Frequenz ω. Berechnen Sie das Phasenraumvolumen für dieses System bei einer Energie von E im mikrokanonischen Ensemble. *(2 Punkte)*

Aufgabe 37 *Virialentwicklung*

Die thermische Zustandsgleichung für ein reales Gas kann in der Dichte $n = N/V$ entwickelt werden:

$$pV = Nk_BT\left[1 + A_2(T)\frac{N}{V} + A_3(T)\left(\frac{N}{V}\right)^2 + ...\right], \tag{2}$$

wobei p den Druck, V das Volumen, N die Teilchenanzahl und T die Temperatur des Systems angibt. Diese Entwicklung wird Virialentwicklung genannt.

a) Berechnen Sie die Virialkoeffizienten $A_i(T)$ für das Van-der-Waals Gas, dessen thermische Zustandsgleichung

$$\left(p + n^2a\right)(1 - nb) = nk_BT \tag{3}$$

lautet. Berechnen Sie zudem die Boyle-Temperatur T_B, die über $A_2(T_B) = 0$ definiert ist. *(2 Punkte)*

b) Die kritische Temperatur T_c, der kritische Druck p_c und das kritische Volumen V_c sind über

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T=T_c} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T=T_c} = 0 \tag{4}$$

definiert. Zeichnen Sie den Druck p als Funktion von dem Volumen V für eine Temperatur T für die Fälle $T \gg T_c$, $T = T_c$ und $T \ll T_c$. Berechnen Sie die kritische Temperatur T_c, den kritischen Druck p_c und das kritische Volumen V_c für das Van-der-Waals Gas. Zeigen Sie zudem, dass T_c, p_c und V_c des Van-der-Waals Gases die universelle Beziehung

$$Nk_B\frac{T_c}{p_cV_c} = \frac{8}{3}$$

erfüllt. *(2 Punkte)*

c) Benutzen Sie die reskalierten Variablen $p' = p/p_c$, $T' = T/T_c$ und $V' = V/V_c$, um die thermische Zustandsgleichung des Van-der-Waals Gases ohne explizites Auftreten der Parameter a und b zu schreiben. *(2 Punkte)*