

Seminar zur Vorlesung TPV: Fortgeschrittene Konzepte der Quantenphysik

Prof. Dr. Giovanna Morigi

SoSe 2013

Blatt 11

11.07.2013

Aufgabe 24 Thomson-Streuung

Wir wollen nun die Streuung eines einfallenden Photons mit $\lambda_i = (\vec{k}_{\lambda_i}, \vec{\epsilon}_{\lambda_i})$ an einer freien Elektronenwelle betrachten, wobei die Energie des einfallenden Photons viel kleiner sein soll als die Ruheenergie, $\hbar\omega_{\lambda_i} \ll mc^2$. Der Hamiltonoperator in der Coulomb-Eichung ist gegeben durch

$$\hat{H} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \hat{\vec{A}}^\perp(\hat{\vec{r}}) \right) + \hat{\boldsymbol{\alpha}}_t mc^2 + \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda}, \quad (1)$$

Dabei fassen wir

$$\hat{H}_0 = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\vec{p}} + \hat{\boldsymbol{\alpha}}_t mc^2 + \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda}, \quad (2)$$

als ungestörten Hamiltonoperator auf. Die Eigenfunktionen des freien Elektrons sind gegeben durch

$$\psi_{\vec{p}}^{(j)}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{mc^2}{|E|V}} u^{(j)}(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}, \quad (3)$$

wobei \vec{p} der Impulseigenwert ist und j den vierkomponentigen Spinor festlegt,

$$u^{(1)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{|E| + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{|E| + mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - ip_y)}{|E| + mc^2} \\ -\frac{cp_z}{|E| + mc^2} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$u^{(3)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} -\frac{cp_z}{|E| + mc^2} \\ -\frac{c(p_x + ip_y)}{|E| + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{|E| + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} -\frac{c(p_x - ip_y)}{|E| + mc^2} \\ \frac{cp_z}{|E| + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

mit $|E| = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$, $\int d^3r \psi_{\vec{p}}^{(j)\dagger} \psi_{\vec{p}'}^{(j')} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta_{jj'}$, und $u^{(j)}(\vec{p})^\dagger u^{(j')}(\vec{p}) = \frac{|E|}{mc^2} \delta_{jj'}$. Die Wechselwirkung

$$\hat{H}_{\text{int}} = -e\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\vec{A}}^\perp(\hat{\vec{r}}) = -e \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\lambda}}} (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda}) (\hat{a}_{\lambda} e^{i\vec{k}_{\lambda} \cdot \vec{r}} + \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} e^{-i\vec{k}_{\lambda} \cdot \vec{r}}) \quad (6)$$

fassen wir als Störung auf, wobei $\omega_{\lambda} = c|\vec{k}_{\lambda}|$ und $\vec{k}_{\lambda} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda} = 0$ gilt.

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude bis in zweiter Ordnung Störungstheorie für die Dynamik in der Zeit T , mit Anfangszeit $t_i = -T/2$ und Endzeit $t_f = +T/2$, ist gegeben durch

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta^{(T)}(E_f - E_i) \mathcal{T}_{fi}, \quad (7)$$

wobei

$$\mathcal{T}_{fi} = \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sum_l \frac{\langle f | H_{\text{int}} | l \rangle \langle l | H_{\text{int}} | i \rangle}{E_i - E_l + i\eta}, \quad (8)$$

wobei die „Diffraction function“ durch

$$\delta^{(T)}(E_f - E_i) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-T/2}^{+T/2} d\tau e^{i(E_f - E_i)\tau/\hbar} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin((E_f - E_i)T/2\hbar)}{(E_f - E_i)} \quad (9)$$

gegeben ist, und für die Zwischenzustände $H_0 | l \rangle = E_l | l \rangle$ gilt.

- a) Wir wollen zunächst die Übergangsamplitude für die Streuung vom Anfangszustand $|i\rangle = |\vec{p}_i = 0, j_i; 1_{\lambda_i}\rangle$ zum Endzustand $|f\rangle = |\vec{p}_f, j_f; 1_{\lambda_f}\rangle$ berechnen, mit $j_i, j_f = 1, 2$. Geben Sie dazu zunächst die Energien E_i und E_f der Zustände $|i\rangle$ und $|f\rangle$ an. Zeigen Sie, dass das Matrixelement $\langle f | \hat{H}_{\text{int}} | i \rangle$ verschwindet. (1 Punkt)
- b) Schreiben Sie den nächsten Term der Übergangsamplitude. Wiederholen Sie, wie die Gesamtheit aller Eigenzustände $|l\rangle$ zu \hat{H}_0 gegeben ist. Zeigen Sie, dass nur das Vakuum und Zweiphotonenzustände beitragen, indem Sie die Matrixelemente für die photonischen Zustände auswerten. (2 Punkte)
- c) Nun wollen wir zunächst die elektronischen Zwischenzustände mit positiven Energien betrachten. Geben Sie zunächst die Energien der Zwischenzustände an. Bestimmen Sie den Impuls der Zwischenzustände und des Endzustandes für die möglichen Photonenzwischenzustände. Berechnen Sie die Matrixelemente für den Fall, dass der Wellenvektor des einfallenden Photons entlang der z -Achse und die Polarisation entlang der y -Achse liegt, sowie dass der Wellenvektor des gestreuten Photons entlang der x -Achse liegt. (2 Punkte)
- d) Bestimmen Sie nun die Beiträge der elektronischen Zwischenzustände mit negativen Energien. Wie sind die Zwischenzustände sowie deren Energien und Impulse gegeben, und welchen Impuls hat der Endzustand? Bestimmen Sie die Matrixelemente für die Wellenvektoren und Polarisation wie in c) und vergleichen Sie die Größenordnung der erhaltenen Matrixelemente mit denen aus Teilaufgabe c). (4 Punkte)
- e) Zeichnen Sie die Diagramme zu den Prozessen jeweils mit Vakuum und Zweiphotonenzuständen jeweils mit positiver und negativer Zwischenzustandsenergie der Elektronen. Beschriften und erklären Sie die Diagramme. (2 Punkte)
- f) Berechnen Sie die gesamte Streurrate für beliebige Wellenvektoren unter Vernachlässigung aller Terme der Ordnung $\hbar\omega_{\lambda_i}, pc \ll mc^2$. Zeigen Sie die folgende Identität

$$\sum_{j=3,4} \left(\langle j_f | \hat{\vec{\alpha}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda_f} | j \rangle \langle j | \hat{\vec{\alpha}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda_i} | j_i \rangle + \langle j_f | \hat{\vec{\alpha}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda_i} | j \rangle \langle j | \hat{\vec{\alpha}} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda_f} | j_i \rangle \right) = 2\vec{\epsilon}_{\lambda_i} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda_f} \delta_{j_i j_f}, \quad (10)$$

um die gesamte Übergangsamplitude und die Übergangswahrscheinlichkeit für die Streuung $\lambda_i \rightarrow \lambda_f$, die Übergangsrate im Raumwinkelement $d\Omega$, sowie den differentiellen Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ zu berechnen. (2 Punkte)

Aufgabe 25 *Master-Gleichung für einen gedämpften harmonischen Oscillator*

In der Vorlesung wurde ein Resonator besprochen, durch den Atome fliegen. Die Atome wechselwirken mit dem elektromagnetischen Feld im Resonator. Die Dynamik der Dichtematrix $\rho(t)$ des Feldes im Resonator ist dabei gegeben durch die folgende Mastergleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \rho] + \frac{\gamma_g}{2} (2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \frac{\gamma_e}{2} (2\hat{a}^\dagger\rho\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\rho - \rho\hat{a}\hat{a}^\dagger) \quad \text{mit } \gamma_e, \gamma_g > 0. \quad (11)$$

Der Hamiltonoperator des Feldes im Resonator ist dabei gegeben durch $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$, und die Operatoren erfüllen die folgende Kommutatorrelation: $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Die Operatoren haben dabei keine explizite Zeitabhängigkeit (Schrödingerbild).

- a) Zeigen Sie, dass die Lösung $\rho(t)$ der Master-Gleichung (11) eine Dichtematrix bleibt. Betrachten Sie dazu die totale Ableitung $\frac{d}{dt} \text{Tr}\{\rho\}$. (1 Punkt)
- b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Vernichtungsoperators folgende Dynamik besitzt:

$$\langle \hat{a} \rangle_t = \text{Tr}\{\hat{a}\rho(t)\} = \langle \hat{a} \rangle_{t=0} e^{-i\omega t} e^{-\kappa t}. \quad (12)$$

Wie ist κ gegeben? Wie ist die Zeitentwicklung des Erwartungswertes des Erzeugungsoperators gegeben? (3 Punkte)

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die partielle Zeitableitung von $\langle \hat{a} \rangle_t$, und integrieren Sie die erhaltene Gleichung. Um dies zu berechnen, ist es nützlich, die Master-Gleichung mit Hilfe von Kommutatoren umzuschreiben und zunächst folgende Identität herzuleiten:

$$\text{Tr}\{\hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]\} = \text{Tr}\{\hat{B}[\hat{C}, \hat{A}]\} = \text{Tr}\{\hat{C}[\hat{A}, \hat{B}]\}. \quad (13)$$