Seminar zur Vorlesung
Theoretische Physik III für LA (Quantenmechanik und Statistische Physik)

SS 2011 **Blatt 10** **16.06.2011**

Aufgabe 1 *Die Stirling-Formel*

Im Folgenden soll die Stirling-Formel

$$N! \simeq \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N, \quad \text{für } N \gg 1$$

bewiesen werden.

a) Zeigen Sie dazu zunächst, dass

$$\int_0^\infty dx\, x^N e^{-x} = N!$$

gilt. *(1 Punkt)*

b) Integrale der Form $I = \int_0^\infty dx\, e^{N f(x)}$ können für $N \gg 1$ und unter Voraussetzung, dass $f(x)$ ein globales Maximum an der Stelle x_0 besitzt mit Hilfe der Sattelpunktnäherung

$$I \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{|N f''(x_0)|}} e^{N f(x_0)}$$

gelöst werden. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Näherung, dass die Stirling-Formel gilt. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Die Entropie und der Dichteoperator*

Zeigen Sie, dass zwischen der Entropie S und dem Dichteoperator $\hat{\rho}$ der Zusammenhang

$$S = -k_B \langle \ln \hat{\rho} \rangle = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$$

besteht. Wie groß ist die Entropie, wenn $\hat{\rho}$ einen reinen Zustand beschreibt? *(1 Punkt)*

Aufgabe 3 *Das Flohmodell*

Wir betrachten zwei Hunde auf denen insgesamt N Flöhe sitzen. Auf Hund 1 sitzen dabei N_1 Flöhe, wo hingegen auf Hund 2, $N - N_1$ Flöhe sitzen. Dabei springen die Flöhe statistisch zwischen den Hunden hin und her.
Die Wahrscheinlichkeit $P_{t+1}(N_1)$ zum Zeitpunkt $t+1$ auf Hund 1, N_1 Flöhe zu finden ergibt sich als Summe aus zwei Termen:

- Term 1: Der Wahrscheinlichkeit $P_t(N_1+1)$, dass zum Zeitpunkt t, N_1+1 Flöhe auf Hund 1 saßen, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit P_{ab}, dass ein Floh absprang,
- Term 2: Der Wahrscheinlichkeit $P_t(N_1-1)$, dass zum Zeitpunkt t, N_1-1 Flöhe auf Hund 1 saßen, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit P_{auf}, dass ein Floh von Hund 2 auf Hund 1 springt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten P_{ab} und P_{auf} und geben Sie $P_{t+1}(N_1)$ an. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass man durch die Berechnung des Mittelwertes $\langle N_1\rangle_{t+1} = \sum_{N_1=0}^{N} P_{t+1}(N_1)N_1$ zu einer Rekursionsformel der Form

$$\langle N_1\rangle_{t+1} = \left(1-\frac{2}{N}\right)\left(\langle N_1\rangle_t - \frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}$$

gelangt.
Dabei ist $\langle N_1\rangle_t$ die mittlere Anzahl von Flöhen zum Zeitpunkt t auf Hund 1. *(2 Punkte)*

Hinweis: Dazu kann angenommen werden, dass $N \gg 1$ ist, so dass $N \simeq N+1$ gilt. Zudem kann es von Vorteil sein bei den auftretenden Summen den Index zu verschieben.

c) Zeigen Sie weiter, dass die in b) gefundene Rekursionsformel zu

$$\langle N_1\rangle_t = \left(1-\frac{2}{N}\right)^t\left(\langle N_1\rangle_0 - \frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}$$

führt, wobei $\langle N_1\rangle_0$ die mittlere Anzahl von Flöhen zum Zeitpunkt $t=0$ auf Hund 1 ist. *(1 Punkt)*

d) Gegen welchen Werte strebt mit fortschreitender Zeit die mittlere Anzahl von Flöhen auf Hund 1, wenn angenommen wird, dass $\langle N_1\rangle_0 = 0$ ist. *(1 Punkt)*

Hinweis: Dabei soll wieder angenommen werden das $N \gg 1$ gilt, wodurch die in c) gefundene Form durch eine Funktion angenähert werden kann, bei der die Grenzwertbetrachtung erleichtert wird.