# Seminar zur Vorlesung
# Theoretische Physik III für LA (Quantenmechanik und Statistische Physik)

**SS 2011** **Blatt 2** **21.04.2011**

## Aufgabe 1 *Pauli-Spin-Matrizen*

Das Stern-Gerlach Experiment liefert bei der Messung des magnetischen Momentes in $z$-Richtung die Werte $\mu_z/\mu = \pm 1$. Die dazugehörige Observable $\sigma_z$ besitzt somit die möglichen Messwerte $\pm 1$.

a) In der Vorlesung wurde das Messsymbol $\boxed{a'' \; a'}$ eingeführt. Geben Sie die vier möglichen Messsymbole an, welche die Messung des magnetischen Momentes in $z$-Richtung beschreiben. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie das $\sigma_z$ durch

$$\sigma_z = \boxed{+\;+}_z - \boxed{-\;-}_z$$

dargestellt werden kann und zeigen Sie weiterhin, dass $\sigma_z^2 = \mathbb{1}$ gilt. (Der Index $z$ soll daran erinnern, dass die Messsymbole zur Messung in $z$-Richtung gehören) *(1 Punkt)*

c) Im dreidimensionalen Raum muss es auch die Observablen $\sigma_x$ und $\sigma_y$ geben, die die Messung in $x$- bzw. in $y$-Richtung beschreiben. Da alle Raumrichtungen äquivalent sind müssen die Messwerte von $\sigma_x$ und $\sigma_y$ auch $\pm 1$ betragen. Somit muss auch $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \mathbb{1}$ gelten.
Beweisen Sie durch Kombinieren der in a) eingeführten Messsymbole, dass es zwei weitere linear unabhängige Ausdrücke gibt, deren Quadrat eins beträgt. Man definiert dann

$$\sigma_x = \boxed{+\;-}_z + \boxed{-\;+}_z, \qquad \sigma_y = i\boxed{-\;+}_z - i\boxed{+\;-}_z.$$

*(1 Punkt)*

d) Zeigen Sie, dass

$$\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z, \qquad \sigma_y\sigma_z = i\sigma_x, \qquad \sigma_z\sigma_x = i\sigma_z$$

und

$$\{\sigma_x, \sigma_y\} = \{\sigma_x, \sigma_z\} = \{\sigma_y, \sigma_z\} = 0$$

gilt. *(1 Punkt)*

e) Die Observablen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ können formal als $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ zusammengefasst werden. Zeigen Sie unter Verwendung der in d) gefundenen Eigenschaften, dass für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

gilt. Leiten Sie aus diesem Ergebnis für einen beliebigen Einheitsvektor $\vec{n}$ die Beziehung

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})^2 = \mathbb{1}$$

ab. *(2 Punkte)*

f) Zeigen Sie, dass $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ und $\mathbb{1}$ in der $\sigma_z$-Darstellung durch die $2 \times 2$ Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Diese Matrizen werden auch Pauli-Spin-Matrizen genannt. *(2 Punkte)*

## Aufgabe 2 *Spur eines Operators*

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für einen Operator $\hat{X}$ gilt

$$\mathrm{Tr}\{|a'\rangle \langle a''| \hat{X}\} = \mathrm{Tr}\{\hat{X} |a'\rangle \langle a''|\} = \langle a''| \hat{X} |a'\rangle .$$

a) Zeigen Sie zunächst, dass die Spur eines Operators $\hat{X}$ als

$$\mathrm{Tr}\{\hat{X}\} = \sum_a \langle a| \hat{X} |a\rangle$$

geschrieben werden kann. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie weiterhin, dass die Spur zyklisch ist, dass heisst es gilt für zwei Operatoren $\hat{X}$, $\hat{Y}$ *(2 Punkte)*

$$\mathrm{Tr}\{\hat{X}\hat{Y}\} = \mathrm{Tr}\{\hat{Y}\hat{X}\}.$$

c) Berechnen Sie die Spur für die in Aufgabe 1 eingeführten Spin-Matrizen. *(1 Punkt)*