Skript: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Vladimir Lazić

(nach dem Mitschrieb von Marian Dietz im Sommersemester 2018)

Inhaltsverzeichnis

1 Adjungierte Abbildungen und der Dualraum **1**

1.1 Adjungierte Abbildungen 1

1.2 Projektionen 8

1.3 Der Dualraum 10

1.4 Darstellungssatz von Riesz 11

1 Adjungierte Abbildungen und der Dualraum

1.1 Adjungierte Abbildungen

Wir fangen an mit einem einfachen, aber sehr hilfreichen Lemma.

Lemma 1.1. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und seien $u, w \in V$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\langle u, v\rangle = \langle w, v\rangle \quad \textit{für alle } v \in V.$$

Dann gilt $u = w$.

Beweis. Aus der Voraussetzung des Lemmas folgt, dass

$$\langle u - w, v\rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Dies bedeutet, dass $u - w \in V^\perp = \{0\}$, und damit folgt das Lemma. □

Lemma 1.2. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Dann gibt es einen eindeutigen Endomorphismus $T^*\colon V \to V$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\big\langle T(v), w\big\rangle = \big\langle v, T^*(w)\big\rangle \quad \textit{für alle } v, w \in V. \tag{1}$$

Beweis. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V und definiere

$$T^*(w) := \sum_{i=1}^n \overline{\langle T(v_i), w\rangle} v_i \quad \text{für jedes } w \in V.$$

Dann gilt, für $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}\big\langle v_j, T^*(w)\big\rangle &= \left\langle v_j, \sum_{i=1}^n \overline{\langle T(v_i), w\rangle} v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle v_j, \overline{\langle T(v_i), w\rangle} v_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \big\langle T(v_i), w\big\rangle \underbrace{\langle v_j, v_i\rangle}_{=\delta_{ij}} = \big\langle T(v_j), w\big\rangle.\end{aligned}$$

Es folgt, dass für jedes $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}\big\langle v, T^*(w)\big\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, T^*(w) \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \big\langle v_j, T^*(w)\big\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \big\langle T(v_j), w\big\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j T(v_j), w \right\rangle = \left\langle T\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right), w \right\rangle = \big\langle T(v), w\big\rangle.\end{aligned}$$

Dies zeigt (1).

Als Nächstes zeigen wir, dass die Abbildung T^* linear ist. Und zwar, fixiere $w_1, w_2 \in V$ und Skalare α_1 und α_2. Für $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\big\langle v, T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)\big\rangle &= \big\langle T(v), \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\big\rangle \\ &= \overline{\alpha_1}\big\langle T(v), w_1\big\rangle + \overline{\alpha_2}\big\langle T(v), w_2\big\rangle \\ &= \overline{\alpha_1}\big\langle v, T^*(w_1)\big\rangle + \overline{\alpha_2}\big\langle v, T^*(w_2)\big\rangle \\ &= \big\langle v, \alpha_1 T^*(w_1) + \alpha_2 T^*(w_2)\big\rangle,\end{aligned}$$

und folglich

$$T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 T^*(w_1) + \alpha_2 T^*(w_2)$$

nach Lemma 1.1.

Letztlich zeigen wir die Eindeutigkeit. Angenommen, es gibt lineare Abbildungen $T_1^*, T_2^* \colon V \to V$ mit den Eigenschaften, dass

$$\big\langle T(v), w\big\rangle = \big\langle v, T_1^*(w)\big\rangle \quad \text{und} \quad \big\langle T(v), w\big\rangle = \big\langle v, T_2^*(w)\big\rangle$$

für alle $v, w \in V$. Daraus folgt, dass

$$\big\langle v, T_1^*(w)\big\rangle = \big\langle v, T_2^*(w)\big\rangle \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

und damit $T_1^*(w) = T_2^*(w)$ für alle $w \in V$ nach Lemma 1.1. □

Definition 1.3. Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T \colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Die in Lemma 1.2 konstruierte Abbildung $T^* \colon V \to V$ heißt die *zu T adjungierte Abbildung.*

Bemerkung 1.4. Es ist einfach zu sehen, dass auch

$$\big\langle v, T(w)\big\rangle = \big\langle T^*(v), w\big\rangle \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Proposition 1.5. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V. Sei $T \colon V \to V$ ein Endomorphismus und sei A die Darstellungsmatrix von T bzgl. $\mathcal{B}$. Dann ist die Darstellungsmatrix der adjungierten Abbildung $T^* \colon V \to V$ bzgl. $\mathcal{B}$ die Matrix $\overline{A}^T$.*

Beweis. Sei $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und sei $A = (a_{ij})$. Sei $C = (c_{ij})$ die Darstellungsmatrix von T^* bzgl. $\mathcal{B}$. Für jeden Vektor $v \in V$ gilt nach LA1:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i.$$

Insbesondere gilt

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \big\langle T(u_j), u_i \big\rangle u_i \quad \text{and} \quad T^*(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \big\langle T^*(u_j), u_i \big\rangle u_i.$$

Aus diesen zwei Gleichungen sehen wir sofort, dass

$$a_{ij} = \big\langle T(u_j), u_i \big\rangle \quad \text{und} \quad c_{ij} = \big\langle T^*(u_j), u_i \big\rangle.$$

Aber

$$c_{ij} = \big\langle T^*(u_j), u_i \big\rangle = \big\langle u_j, T(u_i) \big\rangle = \overline{\big\langle T(u_i), u_j \big\rangle} = \overline{a_{ji}},$$

und die Proposition ist bewiesen. □

Die folgende Proposition ist einfach zu beweisen.

Proposition 1.6. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum, seien $S, T \colon V \to V$ lineare Abbildungen und sei λ ein Skalar. Dann gilt:*

(i) $(T^*)^* = T$,

(ii) $(S + T)^* = S^* + T^*$,

(iii) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$,

(iv) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Beweis. Übungsblatt. □

Proposition 1.7. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T \colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(i) $(\operatorname{Im} T)^\perp = \ker T^*$,

(ii) $(\ker T)^\perp = \operatorname{Im} T^*$,

(iii) $(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \ker T$,

(iv) $(\ker T^*)^\perp = \operatorname{Im} T$.

Beweis. Wir zeigen zuerst (i). Sei $u \in V$. Nach Lemma 1.1 gilt

$$u \in \ker T^* \quad \Longleftrightarrow \quad \langle v, T^*(u) \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V$$

und

$$u \in (\operatorname{Im} T)^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad \big\langle T(v), u \big\rangle = 0 \text{ für alle } v \in V.$$

Da $\langle v, T^*(u)\rangle = \langle T(v), u\rangle$ für alle $v \in V$, aus diesen Äquivalenzen folgt (i).

Aus (i) und Proposition 1.6 folgt $(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \ker\big((T^*)^*\big) = \ker T$, und damit

$$\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp\perp} = (\ker T)^\perp.$$

Man beweist (iii) und (iv) ähnlich. □

Nun werden wir wichtige Endomorphismen einführen.

Definition 1.8. Sei V ein n-dimensionaler Skalarproduktraum, sei $T\colon V \to V$ ein Endomorphismus und sei A die assoziierte Darstellungsmatrix von T bezüglich einer Orthonormalbasis von V. Dann:

(i) T (bzw. A) heißt *normal*, falls $T \circ T^* = T^* \circ T$ (bzw. $A\overline{A}^T = \overline{A}^T A$),

(ii) T (bzw. A) heißt *selbstadjungiert* (bzw. *hermitesch*), falls $T^* = T$ (bzw. $\overline{A}^T = A$),

(iii) T (bzw. A) heißt *orthogonal*, falls $T \circ T^* = \mathrm{Id}_V$ und V reell ist (bzw. $AA^T = I_n$ und V ist reell),

(iv) T (bzw. A) heißt *unitär*, falls $T \circ T^* = \mathrm{Id}_V$ und V komplex ist (bzw. $AA^T = I_n$ und V ist komplex).

Proposition 1.9. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) T ist normal,

(ii) $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle T^*(v), T^*(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$,

(iii) $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ für alle $v \in V$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Und zwar, es gilt

$$\langle T(v), T(w)\rangle = \big\langle v, T^*\big(T(w)\big)\big\rangle \quad \text{und} \quad \langle T^*(v), T^*(w)\rangle = \big\langle v, T\big(T^*(w)\big)\big\rangle$$

nach der Definition der adjungierten Abbildung. Deswegen ist die Gleichung

$$\big\langle T(v), T(w)\big\rangle = \big\langle T^*(v), T^*(w)\big\rangle \quad \text{für alle } v, w \in V$$

äquivalent zur Gleichung

$$\big\langle v, T^*\big(T(w)\big)\big\rangle = \big\langle v, T\big(T^*(w)\big)\big\rangle \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Diese Gleichung ist, nach Lemma 1.1, wiederum äquivalent zu

$$(T^* \circ T)(w) = (T \circ T^*)(w) \quad \text{für alle } w \in V,$$

und dies ist schließlich äquivalent zu $T^* \circ T = T \circ T^*$.

Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist offensichtlich. Für die umgekehrte Implikation nutzt man die Parallelogrammidentität aus LA1. $\square$

Korollar 1.10. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T\colon V \to V$ eine normale Abbildung. Dann gilt:*

(1) $\ker T = \ker T^*$,

(2) ein Skalar λ ist ein Eigenwert von T genau dann, wenn $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von T^* ist,

(3) $v \in V$ ist genau dann ein Eigenvektor von T zu einem Eigenwert λ, wenn v ein Eigenvektor von T^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.

Beweis. Nach dem vorigen Satz gilt $\big\|T(v)\big\| = \big\|T^*(v)\big\|$ für alle $v \in V$, und deswegen ist die Bedingung $T(v) = 0$ für einen Vektor $v \in V$ äquivalent zu $T^*(v) = 0$. Dies zeigt (1).

Ferner, mit Hilfe der Proposition 1.6 gilt

$$(\lambda \operatorname{Id}_V - T)^* = (\lambda \operatorname{Id}_V)^* - T^* = \overline{\lambda} \operatorname{Id}_V - T^*,$$

und aus (1) folgt

$$\ker(\lambda \operatorname{Id}_V - T) = \ker\big(\overline{\lambda} \operatorname{Id}_V - T^*\big).$$

Dies zeigt (2) und (3). $\square$

Proposition 1.11. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) T ist orthogonal bzw. unitär,

(ii) T ist eine Isometrie, d.h. $\big\langle T(v), T(w)\big\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$,

(iii) T ist ein Isomorphismus mit $T^{-1} = T^*$,

(iv) $\big\|T(v)\big\| = \|v\|$ für alle $v \in V$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Und zwar, nach der Definition der adjungierten Abbildung gilt

$$\big\langle T(v), T(w)\big\rangle = \big\langle T^*\big(T(v)\big), w\big\rangle \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

und damit gilt $\big\langle T(v), T(w)\big\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ genau dann, wenn

$$\langle v, w\rangle = \big\langle T^*\big(T(v)\big), w\big\rangle \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Dies gilt genau dann, wenn $T^*\big(T(v)\big) = v$ für alle $v \in V$, und dies ist äquivalent zu

$$T^* \circ T = \mathrm{Id}_V\,.$$

Dies zeigt (iii) $\Rightarrow$ (ii) sofort. Andererseits, diese letzte Gleichung zeigt insbesondere, dass T injektiv ist und deswegen ein Isomorphismus ist (nach LA1, da V endlich-dimensional ist). Es folgt, dass $T^{-1} = T^*$, und die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist bewiesen. Dieser Beweis zeigt auch, dass (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Man zeigt die Äquivalenz (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) wie im Beweis von Proposition 1.9. $\square$

Bemerkung 1.12. Die Proposition zeigt, dass orthogonale/unitäre Abbildungen normal sind, und dass die Definition von orthogonale/unitäre Abbildungen übereinstimmt mit der Definition aus LA1. Es ist auch offensichtlich, dass selbstadjungierte Abbildungen normal sind. Orthogonale, unitäre und hermitesche Matrizen haben wir bereits in LA1 kennengelernt. Eine Abbildung T ist normal bzw. selbstadjungiert bzw. orthogonal bzw. unitär genau dann, wenn ihre Darstellungsmatrix A bezüglich einer Orthonormalbasis für V normal bzw. hermitesch bzw. orthogonal bzw. unitär ist.

Korollar 1.13. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T\colon V \to V$ ein orthogonaler/unitärer Endomorphismus. Dann gilt:*

(1) $T^{-1}\colon V \to V$ ist ebenfalls orthogonal/unitär,

(2) ist λ ein Eigenwert von T, so gilt $|\lambda| = 1$.

Beweis. Da T orthogonal/unitär ist, so ist $T^{-1} = T^*$ nach der vorigen Proposition. Mit Hilfe der Proposition 1.6 gilt

$$T^{-1} \circ (T^{-1})^* = T^{-1} \circ (T^*)^* = T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_V,$$

und damit folgt (1).

Nun, sei λ ein Eigenwert von T und sei v der zu λ zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt:

$$\|v\| = \big\|T(v)\big\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|,$$

und (2) folgt, da $v \neq 0$. $\square$

Satz 1.14 (Spektralsatz für normale Abbildungen)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T\colon V \to V$ eine normale Abbildung. Wir setzen voraus, dass das charakteristische Polynom von T in Linearfaktoren (über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) zerfällt (dies ist automatisch, wenn V unitär ist).*

Dann hat V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von T und insbesondere ist T diagonalisierbar.

Beweis. Der Beweis ist per Induktion nach der Dimension n von V. (Er ist ähnlich zum Beweis vom Spektralsatz für unitäre Abbildungen in LA1.)

Der Fall $n = 1$ ist trivial.

Sei nun die Aussage für $n - 1$ richtig. Da das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, so hat T einen Eigenwert λ. Sei v_1 ein zu λ zugehöriger Eigenvektor mit $\|v_1\| = 1$ und sei $U := \langle v_1 \rangle$. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$ mit $\dim U^\perp = n - 1$.

Wir zeigen nun, dass $U^\perp$ ein T-invarianter Unterraum von V ist. Und zwar, mit Hilfe vom Korollar 1.10, für $u \in U^\perp$ gilt:

$$\big\langle T(u), v_1 \big\rangle = \big\langle u, T^*(v_1) \big\rangle = \big\langle u, \overline{\lambda} v_1 \big\rangle = \lambda \langle u, v_1 \rangle = 0,$$

und damit gilt $T(u) \in U^\perp$.

Damit gilt $T|_{U^\perp} \in \mathrm{End}(U^\perp)$, und man sieht sofort, dass $T|_{U^\perp}$ ein normaler Endomorphismus von $U^\perp$ ist und dass sein charakterisches Polynim in Linearfaktoren zerfällt. Per Induktionsvoraussetzung existiert eine Orthonormalbasis $\{v_2, \ldots, v_n\}$ von $U^\perp$ aus Eigenvektoren von $T|_{U^\perp}$. Es folgt, dass die Menge $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von T ist. □

Wir erinnern uns an die folgende Proposition aus LA1 (die dort als Teil von Hauptachsentransformation für hermitesche Matrizen bewiesen wurde; wenn V euklidisch ist reduziert sich der Beweis mit ein bisschen Arbeit auf den komplexen Fall).

Proposition 1.15. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T\colon V \to V$ eine selbstadjungierte Abbildung. Dann zerfällt das charakteristische Polynom χ_T von T in lineare Faktoren.*

Korollar 1.16. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $T\colon V \to V$ eine selbstadjungierte Abbildung. Dann hat V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von T und insbesondere ist T diagonalisierbar.*

Beweis. Folgt aus Satz 1.14 und Proposition 1.15. □

Proposition 1.17. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum, sei $T\colon V \to V$ eine normale Abbildung und seien v_1 und v_2 Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2 von T. Dann gilt $v_1 \perp v_2$.*

Beweis. Mit Hilfe von Korollar 1.10 gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle &= \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle = \big\langle T(v_1), v_2\big\rangle = \big\langle v_1, T^*(v_2)\big\rangle \\ &= \big\langle v_1, \overline{\lambda}_2 v_2\big\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle,\end{aligned}$$

und damit $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$. □

1.2 Projektionen

Nun definieren wir eine wichtige Unterklasse der linearen Abbildungen.

Definition 1.18. Sei V ein Vektorraum. Ein Endomorphismus $P\colon V \to V$ ist eine *Projektion*, falls $P \circ P = P$. (Kürzer geschrieben: $P^2 = P$.)

Lemma 1.19. *Ist $P\colon V \to V$ eine Projektion, dann gilt $V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $V = \ker P + \operatorname{Im} P$. Und zwar, sei $v \in V$. Dann gilt $v = \big(v - P(v)\big) + P(v)$, und da

$$P\big(v - P(v)\big) = P(v) - P^2(v) = 0,$$

so folgt $v - P(v) \in \ker P$.

Es bleibt zu zeigen, dass die Summe $\ker P + \operatorname{Im} P$ direkt ist. Und zwar, sei $v \in \ker P \cap \operatorname{Im} P$. Dann gibt es ein $w \in V$ mit $v = P(w)$, und aus $P(v) = 0$ folgt $v = P(w) = P\big(P(w)\big) = P(v) = 0$. □

Beispiel 1.20. Sei V ein Skalarproduktraum und sei $U \subseteq V$ ein endlich-dimensionaler Unterraum. Eine Projektion $P\colon V \to V$ heißt *orthogonale Projektion auf U*, falls

$$\ker P = U^\perp \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} P = U.$$

Sei $\{u_1, \ldots, u_m\}$ eine Orthonormalbasis von U ist. Wir behaupten, dass dann

$$P(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i\rangle u_i \quad \text{für alle } v \in V. \tag{2}$$

Insbesondere: Es gibt *genau eine* orthogonale Projektion auf U.

Wir zeigen nun die Behauptung. Wir wissen aus Lemma 1.19, dass

$$v = u + w, \quad \text{wobei } u \in \operatorname{Im} P = U \text{ und } w \in \ker P = U^{\perp}.$$

Dann gilt $P(w) = 0$ und es existiert $z \in V$ mit $u = P(z)$, und damit

$$P(v) = P(u) + P(w) = P(u) = P\big(P(z)\big) = P(z) = u. \tag{3}$$

Da $u \in U$, gibt es Skalare α_i, sodass

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i.$$

Dann gilt, für jedes $j = 1, \ldots, m$:

$$\langle v, u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, u_j \right\rangle + \underbrace{\langle w, u_j \rangle}_{=0} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \alpha_j,$$

und damit

$$u = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Dies, zusammen mit (3), zeigt (2).

Proposition 1.21. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und sei $P \in \operatorname{End}(V)$ eine Projektion. Dann ist P orthogonal genau dann, wenn $P^* = P$.*

Beweis.

$\Longleftarrow$: Sei $P^* = P$. Da P eine Projektion ist, so gilt

$$V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$$

nach Lemma 1.19. Aber nach Proposition 1.7 gilt

$$\ker P = (\operatorname{Im} P^*)^{\perp} = (\operatorname{Im} P)^{\perp},$$

und somit ist P die orthogonale Projektion auf den Unterraum $\operatorname{Im} P$.

$\Longrightarrow$: Sei P eine orthogonale Projektion. Dann gilt

$$V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P \quad \text{und} \quad \ker P = (\operatorname{Im} P)^{\perp}.$$

Aus $P^2 = P$ folgt $(P^*)^2 = P^*$ (nach Proposition 1.6) und nach Proposition 1.7 gilt

$$\operatorname{Im} P^* = (\ker P)^{\perp} = (\operatorname{Im} P)^{\perp\perp} = \operatorname{Im} P.$$

sowie

$$\ker P^* = (\operatorname{Im} P)^{\perp} = \ker P.$$

Dies zeigt, dass P^* auch eine orthogonale Projektion auf $\operatorname{Im} P$ ist. Somit ist $P^* = P$ (nach Beispiel 1.20). $\square$

1.3 Der Dualraum

Definition 1.22. Sei V ein K-Vektorraum. Der Vektorraum $\mathrm{Hom}(V, K)$ aller linearen Abbildungen $V \to K$ heißt *(algebraischer) Dualraum zu* V und wird mit V^* bezeichnet. Die Elemente von V^* heißen *lineare Funktionale auf* V.

Bemerkung 1.23. Sei $T \in V^* \setminus \{0\}$. Dann gilt:

(1) T ist surjektiv, denn aus

$$0 < \dim(\operatorname{Im} T) \leq \dim K = 1$$

folgt $\dim(\operatorname{Im} T) = \dim K$ und daher $\operatorname{Im} T = K$,

(2) ist V endlich-dimensional, so ist dem Dimensionssatz zufolge:

$$\dim(\ker T) = \dim V - \dim(\operatorname{Im} T) = \dim V - 1.$$

Satz 1.24. *Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei die Menge $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis für V. Für jedes $j = 1, \ldots, n$ sei $f_j \in V^*$ das eindeutige lineare Funktional ist mit der Eigenschaft, dass $f_j(e_i) = \delta_{ij}$ für jedes i. Dann ist die Menge $\{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Basis von V^*. Insbesondere gilt* $\dim V^* = \dim V$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $f_1, \ldots, f_n$ linear unabhängig sind. Angenommen, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ sind Skalare, sodass $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$. Dann gilt

$$0 = (\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n)(e_i) = \alpha_1 f_1(e_i) + \cdots + \alpha_n f_n(e_i) = \alpha_i$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Nun zeigen wir, dass $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = V^*$. Und zwar, sei $f \in V^*$ und setze $\beta_i := f(e_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$(\beta_1 f_1 + \cdots + \beta_n f_n)(e_i) = \beta_i = f(e_i)$$

für $i = 1, \ldots, n$. Es folgt, dass die linearen Abbildungen f und $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ auf einer Basis von V übereinstimmen und sind somit gleich. Also, $f \in \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$. □

Definition 1.25. In der Notation des Satzes 1.24 ist $\{f_1, \ldots, f_n\}$ die *Dualbasis* zu $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Bemerkung 1.26. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Die Darstellungsmatrizen der Abbildungen im Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ sind $(1 \times n)$-Matrizen, also Zeilenvektoren. D.h. wenn

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle},$$

so gilt

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(wobei 1 auf der } i\text{-ten Stelle steht).}$$

1.4 Darstellungssatz von Riesz

Sei V ein Skalarproduktraum. Es ist einfach zu sehen, dass die Formel

$$T_v(w) := \langle w, v \rangle \quad \text{für } w \in V$$

ein lineares Funktional definiert, d.h. $T_v \in V^*$. Der folgende wichtige Satz zeigt, dass in endlich-dimensionalen Räumen die Umkehrung auch gilt.

Satz 1.27 (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum. Zu jedem $T \in V^*$ gibt es einen eindeutigen Vektor $v_T \in V$ derart, dass*

$$T(v) = \langle v, v_T \rangle \quad \textit{für alle } v \in V.$$

Beweis. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis für V und definiere

$$v_T := \sum_{i=1}^{n} \overline{T(v_i)} v_i.$$

Dann gilt, für $j = 1, \ldots, n$:

$$\langle v_j, v_T \rangle = \left\langle v_j, \sum_{i=1}^{n} \overline{T(v_i)} v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} T(v_i) \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{=\delta_{ij}} = T(v_j),$$

und deswegen, für $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \in V$ gilt:

$$T(v) = \sum_{j=1}^n \alpha_j T(v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_i \langle v_j, v_T \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, v_T \right\rangle = \langle v, v_T \rangle.$$

Dies zeigt die Existenz des Vektors v_T.

Zur Eindeutigkeit: Wir nehmen an, dass es zwei Vektoren $v_T^1, v_T^2 \in V$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$T(v) = \langle v, v_T^1 \rangle = \langle v, v_T^2 \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Aber dann $v_T^1 = v_T^2$ nach Lemma 1.1. □

Beispiel 1.28. Sei $V := \mathbb{R}[X]^{\leq n}$. Für $p, q \in V$ definiert die Formel

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

ein Skalarprodukt auf V (Übung). Sei nun $x_0 \in (-1, 1)$ fest. Definiere das lineare Funktional $T \in V^*$ durch die Formel

$$T(p) := p(x_0) \quad \text{für } p \in V.$$

Der Rieszsche Satz, angewendet auf T und das Skalarprodukt oben, besagt, dass es dann ein Polynom $q_{x_0} \in V$ gibt derart, dass

$$\int_{-1}^1 p(x)q_{x_0}(x)dx = p(x_0) \quad \text{für alle } p \in V.$$

Proposition 1.29. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum. Zu jedem $T \in V^*$ sei $v_T \in V$ der nach dem Rieszschen Darstellungssatz eindeutig bestimmter Vektor. Dann ist die Abbildung*

$$\psi \colon V^* \to V, \quad T \mapsto v_T$$

eine Bijektion mit den Eigenschaften:

$$\psi(T_1 + T_2) = \psi(T_1) + \psi(T_2) \quad \textit{und} \quad \psi(\alpha T) = \overline{\alpha}\psi(T)$$

für alle $T, T_1, T_2 \in V^*$ und alle Skalare α.

Beweis. Die Abbildung $\psi\colon V^* \to V$ ist bijektiv nach Satz 1.27 und dem Paragraphen vor diesem Satz. Ferner, für alle $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\big\langle v, \psi(T_1 + T_2)\big\rangle &= \big\langle v, v_{T_1+T_2}\big\rangle = (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \\ &= \langle v, v_{T_1}\rangle + \langle v, v_{T_2}\rangle = \langle v, v_{T_1} + v_{T_2}\rangle = \big\langle v, \psi(T_1) + \psi(T_2)\big\rangle,\end{aligned}$$

und damit $\psi(T_1+T_2) = \psi(T_1)+\psi(T_2)$ nach Lemma 1.1. Auf ähnliche Weise, für alle $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\big\langle v, \psi(\alpha T)\big\rangle &= \big\langle v, v_{\alpha T}\big\rangle = (\alpha T)(v) = \alpha T(v) \\ &= \alpha\langle v, v_T\rangle = \langle v, \overline{\alpha} v_T\rangle = \big\langle v, \overline{\alpha}\psi(T)\big\rangle,\end{aligned}$$

und damit $\psi(\alpha T) = \overline{\alpha}\psi(T)$ nach Lemma 1.1. □

Bemerkung 1.30. Mit der Notation wie in der Proposition: Ist V ein euklidischer Raum, dann ist $\psi\colon V^* \to V$ ein Isomorphismus, ansonsten ein *Anti-Isomorphismus* (d.h. es gilt $\psi(\alpha T) = \overline{\alpha}\psi(T)$ für alle $T \in V^*$ und alle Skalare α). Wir nennen diese Abbildung den *Rieszschen (Anti-)Isomorphismus.*

Proposition/Definition 1.31. *Sei V ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum, sei $T\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, und sei $T'\colon V^* \to V^*$ die* duale Abbildung zu T, *d.h.*

$$T'(f) := f \circ T \quad \textit{für } f \in V^*. \tag{4}$$

Diagrammatisch:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T'(f)"'] & V \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Dann gilt

$$T^* = \psi \circ T' \circ \psi^{-1},$$

wobei $\psi\colon V^* \to V$ der Rieszsche (Anti-)Isomorphismus ist. In anderen Worten, das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "\psi"'] & V^* \arrow[d, "\psi"] \\ V \arrow[r, "T^*"'] & V \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Beweis. Für jeden Vektor $u \in V$ bezeichne mit $f_u := \psi^{-1}(u) \in V^*$ das nach dem Rieszschen Darstellungssatz assoziierte lineare Funktional. (In anderen Worten, $f_u(z) = \langle z, u \rangle$ für alle $z \in V$).

Nun, für alle $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned} T'(f_v)(w) &= (f_v \circ T)(w) = f_v\big(T(w)\big) \\ &= \langle T(w), v \rangle = \langle w, T^*(v) \rangle = f_{T^*(v)}(w), \end{aligned}$$

und deswegen $T'(f_v) = f_{T^*(v)}$ für alle $v \in V$. In anderen Worten,

$$T'\big(\psi^{-1}(v)\big) = \psi^{-1}(T^*(v)\big) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Folglich, $T' \circ \psi^{-1} = \psi^{-1} \circ T^*$, und die Aussage folgt. $\square$