Scheinkräfte in gegeneinander rotierenden Bezugssystemen

Betrachte zwei Koordinatensysteme S und S', deren Ursprünge $O = O'$ aufeinander fallen und die mit $\vec{\omega}$ gegeneinander rotieren, d.h. ein in S' fester Vektor $\vec{c}\,'$ entspricht in S dem Vektor $\vec{c}$, welcher dort gemäß

$$\dot{\vec{c}} = \vec{\omega} \times \vec{c} \tag{1}$$

rotiert. Die kartesischen Basisvektoren in S seien $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$, diejenigen in S' seien $\hat{e}'_x$, $\hat{e}'_y$, $\hat{e}'_z$. Letztere sind in S' offensichtlich fix, in S jedoch rotieren sie. Das rotierende Dreibein sei in S durch die Einheitsvektoren $\hat{e}_{x'}$, $\hat{e}_{y'}$, $\hat{e}_{z'}$ gegeben (beachte wo die Striche sind!), und entsprechend Gl. (1) gilt

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_{x'} = \dot{\hat{e}}_{x'} = \vec{\omega} \times \hat{e}_{x'} \tag{2}$$

und entsprechend für $\hat{e}_{y'}$, $\hat{e}_{z'}$.

Ein Punkt P mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in S hat dort den Ortsvektor $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$. Für denselben Punkt bestimmt ein Beobachter in S' die Koordinaten $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Werden diese an S übermittelt, kann dort die Position

$$\vec{r}_{S' \to S} = x'\hat{e}_{x'} + y'\hat{e}_{y'} + z'\hat{e}_{z'} \tag{3}$$

berechnet werden, und es gilt $\vec{r}_{S' \to S} = \vec{r}$. Beachte: Der Vektor $\vec{r}_{S' \to S}$ ist ein Vektor **in $\boldsymbol{S}$**, gebildet mit den aus S' übertragenen Koordinaten!

Bewegt sich der Punkt P, so ist seine Geschwindigkeit in S gegeben durch $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y + \dot{z}\hat{e}_z$. Die in S' gemessenen Komponenten der Geschwindigkeit sind $\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix}$. Werden diese nach S übermittelt, kann dort nach dem Rezept von Gl. (3) der Vektor $\vec{v}_{S' \to S} = \dot{x}'\hat{e}_{x'} + \dot{y}'\hat{e}_{y'} + \dot{z}'\hat{e}_{z'}$ gebildet werden. Dieser ist jedoch **nicht** der Geschwindigkeitsvektor in S, d.h. $\vec{v}_{S' \to S} \neq \vec{v}$, denn aus Gl. (3) folgt

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{S' \to S} = \dot{x}'\hat{e}_{x'} + \dot{y}'\hat{e}_{y'} + \dot{z}'\hat{e}_{z'} + x'\dot{\hat{e}}_{x'} + y'\dot{\hat{e}}_{y'} + z'\dot{\hat{e}}_{z'} \tag{4}$$

Dies berücksichtigt, dass sich die Basis von S' in S entsprechend Gl. (2) bewegt. Somit ist

$$\vec{v} = \vec{v}_{S' \to S} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{bzw.} \quad \vec{v} = \vec{v}_{S' \to S} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{S' \to S} \tag{5}$$

Entsprechend geht man mit der Beschleunigung vor. Es ist

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y + \ddot{z}\hat{e}_z \tag{6}$$

In S' wird $\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix}$ gemessen, und der aus den nach S übermittelten Koordinaten gebildete Vektor lautet $\vec{a}_{S'\to S} = \ddot{x}'\hat{e}_{x'} + \ddot{y}'\hat{e}_{y'} + \ddot{z}'\hat{e}_{z'}$. Allerdings ist wieder $\vec{a}_{S'\to S} \neq \vec{a}$, denn mit Gl. (5) folgt

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{S'\to S} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d}{dt}\vec{v}_{S'\to S} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \\
&= \ddot{x}'\hat{e}_{x'} + \ddot{y}'\hat{e}_{y'} + \ddot{z}'\hat{e}_{z'} + \dot{x}'\dot{\hat{e}}_{x'} + \dot{y}'\dot{\hat{e}}_{y'} + \dot{z}'\dot{\hat{e}}_{z'} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \\
&= \vec{a}_{S'\to S} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{S'\to S} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \\
&= \vec{a}_{S'\to S} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{S'\to S} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_{S'\to S} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \\
&= \vec{a}_{S'\to S} + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{S'\to S} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\ .
\end{aligned}$$

Umgekehrt findet man: Wenn ein ruhender Beobachter (d.h. in S) eine Beschleunigung $\vec{a}$ misst, dann misst der rotierende Beobachter in S' die Beschleunigung

$$\vec{a'} = \vec{a} + 2\,\vec{v'} \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})\ . \tag{7}$$

Insbesondere führt eine Bewegung in S' mit Geschwindigkeit $\vec{v'}$ zu zwei Scheinkräften (bzw. -beschleunigungen), der Coriolisbeschleunigung $\vec{a}_{\mathrm{C}} = 2\,\vec{v'} \times \vec{\omega}$ und der Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a}_{\mathrm{Zf}} = \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$.